



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO**



FACULTAD DE ECONOMÍA

**“EXPOSICIÓN DEL MODELO MEDIA-VARIANZA PARA EXPLICAR EL
AUMENTO DEL RIESGO DURANTE TIEMPO DE CRISIS”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARÍA

PRESENTA:

CASTILLO ALBARRÁN DULCE IVÓN

DÍAZ MORALES DIANA

SUÁREZ TORRES ALAN EDUARDO

ASESOR:

Dr. en C. MAURICIO GARCÍA MARTÍNEZ

REVISORES:

Dra. en C. ANNEL HURTADO JARAMILLO

M. en E.S.R. y M. EMILIO DAVID OLVERA REBOLLEDO

TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO

SEPTIEMBRE 2021

Contenido

Introducción	8
I. Fundamentos matemáticos.....	10
I.1 Espacio de probabilidad	10
I.1.1 Experimento aleatorio.....	10
I.1.2 Espacio muestral	12
I.1.3 Medida de probabilidad	14
I.1.4 Aplicación de los elementos fundamentales de la Teoría de Probabilidad a la Teoría Moderna del Portafolio	15
I.2 Variables aleatorias y dos clases de variables aleatorias.....	16
I.2.1 Variables aleatorias	16
I.3 Función de distribución y función de densidad.....	17
I.3.1 Función de densidad	17
I.4 Esperanza matemática.....	18
I.5 Evaluación del riesgo.....	22
1.5.1 Estimación del rendimiento esperado y riesgo de las acciones	22
1.5.2 Estimación del rendimiento esperado y riesgo de un portafolio	25
II. Modelo media-varianza de Markowitz.....	28
II.1 Portafolios eficientes	28
II.1.1 Análisis geométrico del modelo media-varianza para tres acciones.....	29
II.2 Frontera eficiente para el modelo media-varianza con n acciones.....	40
II.2.1 Conjunto de oportunidad.....	41
II.2.2 Diversificación de Markowitz.....	42
II.2.3 Frontera eficiente para el modelo media-varianza	47
II.3 Solución analítica del modelo media-varianza para determinar la frontera eficiente	50
II.3.1 Determinación de la frontera eficiente para el modelo media-varianza.....	50

III. Modelo de índice único	58
III.1 Relación del Modelo de Índice Único con la TMP	65
III.2 Determinación de la frontera eficiente bajo el Modelo de Índice Único	70
IV. Construcción de un portafolio de inversión con acciones pertenecientes al índice S&P/BMV IPC.....	79
IV.1 Elección de la muestra.....	79
IV.2 Análisis de datos.....	80
IV.3 Construcción del portafolio de inversión mediante el modelo media-varianza de Markowitz.....	85
IV.3 Construcción del portafolio de inversión mediante el Modelo de Índice Único	88
V. Comportamiento del riesgo del portafolio durante una crisis financiera.....	92
V.1 Ciclos económicos.....	92
V.1.1 Crisis financiera.....	94
V.2 Portafolio de inversión y la crisis financiera de 2008.....	95
Conclusiones	104
Apéndice A1	106
A1.1 Frontera eficiente con un activo libre de riesgo	106
A1.2 Determinación de la frontera eficiente con un activo libre de riesgo.....	109
Anexo B.1 Aproximación del PVM.....	116
Anexo B.2 Descripción de las empresas que conforman el portafolio	119
Bibliografía.....	124

Introducción

La diversificación de inversiones era una práctica bien establecida mucho antes de la publicación del artículo “Portfolio Selection” en 1952, de Harry Markowitz, sentó las bases de lo que ahora se conoce como Teoría Moderna del Portafolio (TMP) (Markowitz, 1999).

La TMP ha tenido mayor influencia en la práctica de la gestión de portafolios. En su forma más simple, proporciona un marco para construir y seleccionar portafolios en función del rendimiento esperado de las inversiones y el apetito por el riesgo del inversionista. También es conocida como análisis media-varianza, introdujo una terminología completamente nueva que ahora se ha convertido en la norma en el área de gestión de inversiones (Fabozzi et al., 2002).

La construcción de un portafolio de inversión no es una tarea fácil, puesto que es necesario analizar todas las acciones individuales candidatas a conformarlo, mediante estimadores de media, varianza y covarianza en el horizonte de inversión elegido.

Esta tarea se vuelve aún más complicada en tiempo de crisis, debido a que el comportamiento de las correlaciones puede operar en contra del inversionista, además de que en este periodo los mercados suelen ser más volátiles.

Cuando esto sucede, las acciones que ya estaban correlacionadas pueden aumentar su nivel de correlación; los datos y la experiencia que se remontan a lo largo de los años ayudan a demostrarlo (Geczy, 2014).

Específicamente en la crisis financiera de 2008 el pánico que sucumbió a Estados Unidos también afectó en México, principalmente por el impacto que sufrieron los inversionistas cuando vieron que sus acciones comenzaban a perder valor. La Bolsa Mexicana de Valores (BMV) no fue inmune a la crisis que se produjo a nivel internacional, por el contrario, comenzó a tener un comportamiento volátil (Jaramillo Olivares y Jaramillo Jaramillo, 2016).

En el transcurso de 2008 se agudizó la crisis bancaria y financiera global, teniendo como punto culminante el derrumbe de los mercados de valores en octubre de 2008, y que se prolongó hasta febrero de 2009 (Cámara Izquierdo y Mariña Florez, 2010).

Lo anterior nos conduce al tema de interés del presente trabajo, que es encontrar un elemento que ayude a explicar el aumento del riesgo de un portafolio durante una crisis financiera.

El análisis del presente trabajo será abordado desde un enfoque descriptivo, mediante la construcción de un portafolio de inversión bajo el modelo media-varianza de Markowitz y con esto describir el comportamiento del riesgo durante la crisis financiera de 2008.

Construimos este portafolio de inversión con acciones de las empresas que integraban el S&P/BMV IPC en el periodo 3er trimestre de 2007 a 1er trimestre de 2011, el cual incluye el periodo de crisis, y con esto comprobamos que el modelo media-varianza ayuda a explicar el aumento del riesgo durante tiempo de crisis.

Por lo cual, el trabajo se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo I desarrollamos los fundamentos matemáticos de la TMP, la exposición del modelo media-varianza la realizamos en el Capítulo II, mientras que, para el Capítulo III presentamos una simplificación para determinar la frontera eficiente.

Estos capítulos nos dan las herramientas para construir el portafolio de inversión presentado en el capítulo IV, mismo portafolio que es analizado antes, durante y después de la crisis financiera de 2008 en el capítulo V. Finalmente, se muestran las conclusiones y la bibliografía que no es exhaustiva, sin embargo, es suficiente para entender todo el trabajo.

I. Fundamentos matemáticos

Los elementos básicos del análisis media-varianza son el rendimiento esperado y el riesgo aceptado por el inversionista, estos términos son sólo una aplicación de los conceptos valor esperado y varianza de la Teoría de Probabilidad; por esta razón comenzamos exponiendo los fundamentos de la misma, y posteriormente mostramos cómo se aplican en el modelo media-varianza presentado por Markowitz.

Cualquier teoría implica necesariamente la idealización, y nuestra primera idealización se refiere a los resultados posibles de un “experimento aleatorio” u “observación”. Si queremos construir un modelo abstracto, debemos decidir al principio, acerca de lo que constituye un resultado posible del experimento aleatorio (idealizado) (Feller, 1973).

I.1 Espacio de probabilidad

Un modelo para estudiar un experimento aleatorio ε toma la forma de una *terna de probabilidad o espacio de probabilidad* (Ω, \mathcal{F}, P) , en donde Ω es un conjunto no vacío, \mathcal{F} es una colección no vacía de subconjuntos de Ω , y P es una medida de probabilidad definida sobre \mathcal{F} . A continuación, definimos cada elemento.

I.1.1 Experimento aleatorio

El concepto básico sobre el que descansa toda la teoría de probabilidad es el de experimento aleatorio.

Definición. Un **experimento aleatorio** ε es un experimento que presenta las siguientes tres propiedades (Venegas Martínez, 2008):

1. Tiene al menos dos posibles resultados,
2. El conjunto de posibles resultados se conoce antes de que el experimento se realice, y
3. Puede repetirse esencialmente bajo las mismas condiciones.

Ejemplos.

1. El experimento:

$\varepsilon_1 = \text{"lanzar una moneda y observar la cara que se obtiene al caer"}$

¿Es un experimento aleatorio?

Sí, podemos comprobar que ε_1 es experimento aleatorio ya que: (1) existen dos posibles resultados (águila o sol), (2) se sabe que el resultado será un elemento del siguiente conjunto {*águila, sol*}, y (3) si una misma persona lanza la moneda en varias ocasiones el experimento se estará repitiendo esencialmente bajo las mismas condiciones.

2. El experimento:

$\varepsilon_2 = \text{"lanzar un dado y observar la cara que se obtiene al caer"}$

¿Es un experimento aleatorio?

Efectivamente ya que cumple con las condiciones de un experimento aleatorio: (1) existen seis posibles números a observar en la cara superior, (2) se sabe que el número observado será un elemento del siguiente conjunto {1,2,3,4,5,6}, y (3) si una misma persona lanza el dado en varias ocasiones el experimento se estará repitiendo esencialmente bajo las mismas condiciones.

Es importante mencionar que además de los experimentos aleatorios también existen los **experimentos deterministas**, los cuales producen el mismo resultado cuando se les repite esencialmente bajo las mismas condiciones.

Ejemplos (experimento determinista vs experimento aleatorio).

1. Los experimentos

$d_1 = \text{"lanzar una moneda y observar el resultado"}$

o

$d_2 = \text{"lanzar un dado y observar el resultado"}$

Son ejemplos de experimentos deterministas, ya que producirán siempre el mismo resultado: caer.

2. El experimento

$d_3 =$ "medir el volumen de un gas cuando la presión
y la temperatura son constantes"

Es otro ejemplo de experimento determinista ya que la ley de Boyle para los gases predice con cierta exactitud el resultado de esta medición.

Estos ejemplos evidencian que en algunas ocasiones no es fácil poder clasificar un experimento dado en aleatorio o determinista, y esto dependerá del conocimiento con el que el observador cuente del experimento y de lo que éste desee observar del mismo.

El objeto de estudio de la Teoría de Probabilidad son los experimentos del tipo aleatorio, que afectan o son producidos por el humano, para tener un mejor entendimiento de los mismos.

I.1.2 Espacio muestral

Definición. El conjunto de todos los posibles resultados, o estados de la naturaleza, de un experimento aleatorio, ε , es llamado **espacio muestral** y se le denota por Ω .

Ejemplos.

1. Un espacio muestral para el experimento aleatorio:

$\varepsilon_1 =$ "lanzar una moneda y observar la cara que se obtiene al caer"

es $\Omega_1 = \{\text{águila, sol}\}$

2. Un espacio muestral para el experimento aleatorio:

$\varepsilon_2 =$ "lanzar un dado y observar la cara que se obtiene al caer"

es $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$

σ -álgebra

Sea Ω un conjunto y \mathcal{F} una familia de subconjuntos de Ω .

Definición. \mathcal{F} es una σ -álgebra si

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}$
3. $F_1, F_2, F_3, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$.

A los elementos de \mathcal{F} se les llama *eventos*¹.

Ejemplos.

1. Dos σ -álgebras de Ω_1 son $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega_1\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{\text{águila}\}, \{\text{sol}\}, \Omega_1\}$; \mathcal{F}_1 no nos proporciona ninguna información acerca de ε_1 y \mathcal{F}_2 nos proporciona toda la información².

Así, debido a que a los elementos de \mathcal{F} se les llama eventos, con \mathcal{F}_1 solo tenemos “información” acerca de $\emptyset = \text{evento imposible}$ y $\Omega = \text{evento seguro}$, es decir, al efectuar un ensayo de ε_1 podemos obtener un evento sin “ningún resultado” (de aquí proviene el nombre evento imposible, ya que por definición, al efectuar un ensayo de ε , debemos obtener un resultado), y también podemos obtener el evento que siempre va a ocurrir, por lo cual, no contamos en realidad con ninguna información.

En cambio, con \mathcal{F}_2 tenemos además de los eventos \emptyset y Ω a los eventos $A_1 = \{\text{águila}\}$ y $A_2 = \{\text{sol}\}$, es decir, al efectuar un ensayo de ε_1 podemos obtener como resultados el evento donde observemos águila o el evento donde observemos sol, con lo cual contaríamos con toda la información acerca de ε_1 .

2. Una σ -álgebra de Ω_2 es $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4,5,6\}, \Omega_2\}$, con \mathcal{F}_3 tenemos la información acerca de los eventos $B_1 = \{1\}$ y $B_2 = \{2,3,4,5,6\}$, es decir, al efectuar un ensayo

¹ A la pareja (Ω, \mathcal{F}) se le llama *espacio medible*.

² Esto debido a que $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ es la σ -álgebra más pequeña y $\mathcal{F}_2 = 2^\Omega$ es la σ -álgebra más grande que podemos asociar a Ω .

de ε_2 podemos obtener como resultados el evento donde observemos un 1 en la cara superior o el evento donde no observemos un 1 en la cara superior, con lo cual contaríamos con información parcial de ε_2 .

Proposición. Si \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 son dos σ -álgebras de Ω , entonces

1. $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ es σ -álgebra.

Debido a que la intersección de σ -álgebras es una σ -álgebra se puede formular la siguiente definición.

Definición. Sea \mathcal{D} una colección no vacía de subconjuntos de Ω . La **σ -álgebra generada** por \mathcal{D} , denotada por $\sigma\{\mathcal{D}\}$, es la colección

$$\sigma\{\mathcal{D}\} = \cap\{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}\}$$

I.1.3 Medida de probabilidad

Definición. Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio medible. Una **medida de probabilidad** es una función $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ que satisface:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A) \geq 0$, para cualquier $A \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, con $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$, $\Rightarrow P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

La terna (Ω, \mathcal{F}, P) es llamada un *espacio de probabilidad*.

Una σ -álgebra puede interpretarse como un conjunto de propiedades de los eventos, p. ej. el conjunto de propiedades por las que podemos distinguir los eventos o el conjunto de propiedades en las que podemos fundamentar decisiones y responder preguntas. Por lo tanto, la σ -álgebra puede interpretarse como información (Fries, 2007).

Por lo anterior, solo estaremos interesados en asignar probabilidades a los elementos de \mathcal{F} .

Así, un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) puede interpretarse como un conjunto de todos los posibles resultados, una familia de propiedades de los eventos y una función

que asigna una probabilidad a cada propiedad de los eventos, la probabilidad de que un evento con las respectivas propiedades ocurra (Fries, 2007).

I.1.4 Aplicación de los elementos fundamentales de la Teoría de Probabilidad a la Teoría Moderna del Portafolio

El principal problema de la TMP es la determinación de los pesos óptimos a invertir en cada acción candidata a conformar un portafolio de inversión, una propuesta de solución a este problema es el Modelo media-varianza (Modelo M-V) cuyos elementos principales provienen de la Teoría de Probabilidad (valor esperado y varianza). Para ver de qué forma sucede esto, estudiemos el primer elemento de la Teoría de Probabilidad, a decir, un experimento aleatorio.

Consideremos el siguiente experimento:

$$\varepsilon_3 = \text{observar el precio de una acción después de un mes}$$

Debemos verificar que ε_3 sea un experimento aleatorio para que de esta forma sea objeto de estudio de la Teoría de Probabilidad.

En efecto, ε_3 es experimento aleatorio, ya que cumple con las tres condiciones de nuestra definición: (1) el precio de una acción puede ser cualquier real positivo (incluyendo al cero), (2) por lo menos se sabe que el precio no será un número negativo y (3) podemos observar el precio de la acción mes con mes (mientras no se presenten sucesos extremos como: una crisis financiera, una recesión económica, inestabilidad política, problemas corporativos).

Ahora veamos la forma que tiene un espacio muestral para ε_3 .

Debido a que este conjunto debe contener todos los posibles precios de una acción, para el experimento aleatorio ε_3 se propone el siguiente espacio muestral³:

$$\Omega_3 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \{x : 0 \leq x < \infty\} = [0, \infty)$$

³ El espacio muestral podría describirse en forma más realista estableciendo una cota superior para el precio de una (sola) acción, quizás el capital social de la empresa, aunque todavía es muy grande (Venegas Martínez, 2008).

Una σ -álgebra de Ω_3 es $\mathcal{F}_4 = \sigma\{[0, \infty)\}^4$, esta es una σ -álgebra suficiente para estudiar a ε_3 . A pesar de que contiene la mayor cantidad de información, en el contexto de la TMP, no existen agentes que cuenten con toda la información ni tampoco los que carezcan por completo de ésta.

Con los elementos anteriores podemos construir un espacio de probabilidad $(\Omega_3, \mathcal{F}_4, P)$ y de esta forma verificamos que podemos estudiar a ε_3 desde la perspectiva de la Teoría de Probabilidad.

Sin embargo, cuando se realiza un experimento aleatorio, estamos interesados principalmente en alguna función de los resultados en contraposición al resultado real en sí (Ross, 2009).

Esto sucede en la TMP (y en el Modelo M-V como elemento de ésta), ya que estudia los rendimientos de las acciones en lugar de los precios. De esta forma, para poder estudiar los rendimientos hacemos uso del concepto de variable aleatoria debido a que los consideraremos como tal.

I.2 Variables aleatorias y dos clases de variables aleatorias

En este apartado enunciamos el concepto de variable aleatoria y presentamos dos variables aleatorias particulares, variable aleatoria discreta y variable aleatoria continua.

I.2.1 Variables aleatorias

Definición. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria** es una función $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\}$ es un evento (Rincón, 2006).

Con base en la definición anterior una variable aleatoria no es ni variable ni aleatoria, es una función. El término variable aleatoria proviene del hecho de que al efectuar un ensayo del experimento aleatorio ε se obtiene un resultado (aleatorio) $\omega \in \Omega$ y al aplicar la función $X(\omega)$ se obtiene un $x \in \mathbb{R}$.

⁴ Donde $\sigma\{[a, \infty): a \in \mathbb{R}\}$ es una σ -álgebra generada, ésta es una σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} .

Además, clasificaremos a las variables aleatorias en discretas o continuas, según el conjunto de valores que éstas puedan tomar⁵.

Definición. Una **variable aleatoria discreta** X sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es una función X con dominio Ω y rango un subconjunto finito o infinito numerable $\{x_1, x_2, \dots\}$ de los números reales \mathbb{R} tal que $\{\omega: X(\omega) = x_i\}$ es un evento para toda i (Hoel et al., 1971).

Definición. Una variable aleatoria X es llamada una **variable aleatoria continua** si (Hoel et al., 1971).

$$P(X = x) = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

I.3 Función de distribución y función de densidad

A continuación, definimos la función de distribución de una variable aleatoria X , así como la función de densidad de una variable aleatoria discreta y la función de densidad de una variable aleatoria continua.

En lo sucesivo sean (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria, elementos base para las siguientes definiciones.

Definición. La **función de distribución** de una variable aleatoria X es la función $F(x): \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, definida como sigue (Rincón, 2006),

$$F(x) = P(X \leq x)$$

I.3.1 Función de densidad

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta. La función real f definida sobre \mathbb{R} por $f(x) = P(X = x)$ es llamada la **función de densidad discreta** o **función masa de probabilidad** de X (Hoel et al., 1971).

⁵ Existen también las **variables aleatorias mixtas** que son una mezcla de una variable aleatoria discreta y una variable aleatoria continua, para una descripción detallada consulte Bertsekas y Tsitsiklis (2008).

Propiedades.

1. $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_i f(x_i) = 1$

El término masa de probabilidad proviene del hecho de que, $f(x)$ concentra una masa positiva en cada punto x , para algún subconjunto finito o infinito numerable de \mathbb{R} , entonces $f(x)$ en suma distribuye una unidad de masa de probabilidad sobre la recta real. De esta manera, a los puntos x se les llama *puntos de masa* de X .

Definición. Una **función de densidad** (con respecto a la integración) de una variable aleatoria continua X es una función no negativa f tal que (Hoel et al., 1971),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Propiedades.

1. $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad a \leq b$
2. $f(x) = F'(x), \quad -\infty < x < \infty$

El término función de densidad se debe a que en un intervalo $[a, b]$ la densidad varía de un punto a otro de modo que, en el punto x la densidad es $f(x)$. Entonces para encontrar la densidad total del intervalo primero lo dividimos en partes pequeñas a través de dx que contiene al punto x y después integramos sobre $[a, b]$.

I.4 Esperanza matemática

En esta sección enunciamos el concepto de esperanza matemática para una variable aleatoria discreta y una variable aleatoria continua; debido a que sobre esta característica numérica descansa la forma en como mediremos el riesgo de un portafolio.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad discreta $f(x)$. La **esperanza matemática** (o valor esperado) de X , denotada por $E(X)$, se define como

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

Esta definición tiene sentido siempre que la serie sea convergente.

Definición. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f . La **esperanza matemática** (o valor esperado) de X , denotada por $E(X)$, se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Esta definición tiene sentido siempre que la integral sea convergente.

El valor esperado tiene la propiedad de ser lineal, y haremos uso de ésta a lo largo de este trabajo.

Linealidad del valor esperado: Para cualesquiera variables aleatorias X_1, \dots, X_n y cualesquiera constantes c_1, \dots, c_n , se cumple que

$$E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i E(X_i).$$

Algunos objetos asociados con la esperanza son la varianza de una variable aleatoria X , la covarianza entre dos variables aleatorias X y Y ; y además una forma de reescribir la covarianza se conoce como coeficiente de correlación. Los definimos a continuación.

Varianza, covarianza y coeficiente de correlación

Definición. La **varianza** de una variable aleatoria X , denotada por $Var(X)$, se define como la siguiente esperanza, si esta existe,

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

El número no negativo $\sigma = \sqrt{Var(X)}$ es llamado la **desviación estándar** de X .

Definición. Sean X y Y dos variables aleatorias. La **covarianza** entre X y Y , denotada por $Cov(X, Y)$, se define por (Feller, 1973),

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Esta definición tiene sentido siempre que X y Y tengan varianzas finitas, i.e que la varianza exista.

La varianza y la covarianza cumplen algunas propiedades que utilizaremos en el presente trabajo.

1. Para cualquier constante c , $Var(c) = 0$.
2. Para cualquier variable aleatoria X y cualquier constante c , $Var(X + c) = Var(X)$.
3. No linealidad de la varianza: Para cualesquiera variables aleatorias X y Y , y cualquier constante c , se cumple que

$$Var(cX) = c^2Var(X)$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) .$$

4. Para cualquier variable aleatoria X , $Cov(X, X) = Var(X)$
5. Para cualesquiera variables aleatorias X y Y , $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
6. Para cualesquiera constantes a y b , y cualesquiera variables aleatorias X y Y se cumple que

$$Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$$

Definición. Sean X y Y dos variables aleatorias con varianzas finitas no cero. El **coeficiente de correlación** $\rho(X, Y)$ se define por

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

Proposición. El coeficiente de correlación entre dos variables aleatorias X y Y con varianzas finitas distintas de cero satisface las desigualdades (Rincón, 2014),

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$$

El coeficiente de correlación es otra forma de escribir la $Cov(X, Y)$ ⁶. Y se utiliza como una medida del grado de dependencia (lineal) entre dos variables aleatorias.

Un valor de $\rho(X, Y)$ cercano a $+1$ o -1 indica un alto grado de linealidad entre X y Y , mientras que un valor cercano a 0 indica que tal linealidad está ausente. Un valor positivo

⁶ El físico definirá el coeficiente de correlación como “covarianza adimensional” (Feller, 1973).

de $\rho(X, Y)$ indica que Y tiende a aumentar cuando X lo hace (ver Tabla 1.1), mientras que un valor negativo indica que Y tiende a disminuir cuando X aumenta. Si $\rho(X, Y) = 0$, entonces se dice que X y Y no están correlacionadas (Ross, 2009).

Ejemplo.

Tabla 1.1 Varianza y Covarianza para X y Y .

Compañía		Varianza	Cov(X, Y)
GMEXICO	X	190.74	33.88
FEMSA	Y	65.49	

Fuente: Elaboración propia con datos de Investing.com.

Entonces,

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{33.88}{\sqrt{190.74}\sqrt{65.49}} = .3031$$

Este resultado indica que Y tiende a aumentar cuando X lo hace.

Tabla 1.2 Valores de ρ para algunas empresas.

Periodo	
Precrisis	$\rho_{ALFAA,GFNORTE} = 0.8420$
Crisis	$\rho_{ALFAA,AC} = 0.0$
Postcrisis	$\rho_{ALSEA,ASURB} = -0.1836$

Fuente: Elaboración propia con datos de Investing.com.

En la Tabla 1.2 podemos observar el coeficiente de correlación entre algunas empresas del S&P/BMV IPC para ciertos periodos de estudio (en el Capítulo IV explicaremos como se obtuvieron estos valores y en el Capítulo V qué significan dichos periodos).

En el periodo Precrisis observamos un coeficiente de correlación de .8420 lo que indicaría que las acciones de GFNORTE tiende a aumentar cuando las de ALFAA lo hacen.

Para el periodo Crisis tenemos un coeficiente de correlación de 0.0 entonces se dice que ALFAA y AC no están correlacionadas.

En el periodo Postcrisis observamos un coeficiente de correlación de -0.1836 lo que indicaría que las acciones de ASURB tiende a disminuir cuando las de ALSEA aumentan.

I.5 Evaluación del riesgo

Sabemos que el rendimiento es una variable aleatoria, en particular la tasa de rendimiento R de una acción es variable aleatoria, entonces, a través de la Teoría de Probabilidad vista se pueden formular las siguientes definiciones utilizadas en la TMP y mediante las cuales podemos estimar el rendimiento y evaluar el riesgo de las acciones.

1.5.1 Estimación del rendimiento esperado y riesgo de las acciones

Definición: El **rendimiento esperado de una acción** se define como (Francis y Kim, 2013),

$$E(R_i) = \sum_{s=1}^n p_s r_{i,s} \quad (1.1)$$

Donde:

$E(R_i)$ representa el rendimiento esperado de la acción i , cuando $i = 1, 2, \dots, n$

p_s es la probabilidad de que R tome el valor s

$r_{i,s}$ es la tasa de rendimiento de la acción i en el valor s

Ejemplo.

Si el rendimiento de la acción A que un inversionista espera depende de cómo se desenvuelven las ventas de la compañía en los próximos 12 meses, el inversionista asume tres escenarios:

Tabla 1.3 Posibles escenarios de un inversionista.

Escenario	Probabilidad de ocurrencia	Rendimiento
Optimista	35.00%	25.00%
Moderado	40.00%	10.00%
Negativo	25.00%	-5.00%

Fuente: Elaboración propia.

Entonces, el rendimiento esperado de la acción A se calcula como:

$$E(R_A) = (35\%)(25\%) + (40\%)(10\%) + (25\%)(-5\%) = 11.50\%$$

El rendimiento esperado de la acción corresponde al promedio ponderado de los rendimientos esperados en cada escenario.

Definición. La **varianza de los rendimientos de la acción i** se define como, la dispersión de la tasa de rendimiento de la acción alrededor de su rendimiento esperado, y se calcula como (Francis y Kim, 2013):

$$\sigma_i^2 = E[(R_i - E(R_i))^2] = \sum_{s=1}^n p_s [(r_s - E(R_i))^2]. \quad (1.2)$$

Debido a que las unidades de la varianza quedan expresadas al cuadrado, se dificulta su comparación, por esto se usa con mayor frecuencia la desviación estándar de los rendimientos.

Definición: La **desviación estándar de los rendimientos de las acciones** es la raíz cuadrada positiva de la varianza, y se expresa como:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$$

La varianza de los rendimientos y la desviación estándar de los rendimientos se utilizan como medidas del riesgo. Es decir, se podría equiparar el riesgo de una acción i con su variabilidad de rendimiento. En particular a la desviación estándar de los rendimientos (utilizada como medida del riesgo) se le conoce como la *volatilidad* de la acción i .

Entre más grande sea la desviación estándar, mayor es el grado de volatilidad de las acciones, es decir, mayor dispersión de las observaciones alrededor de la media.

Ejemplo.

Considere las siguientes dos acciones:

Tabla 1.4 Rendimientos anuales y desviación estándar para dos acciones.

Periodo	Rendimientos	
	Acción 1	Acción 2
Año 1	4.00%	7.00%
Año 2	20.00%	9.00%
Año 3	16.00%	6.00%
Rendimiento	13.00%	7.00%
Desviación estándar	8.00%	2.00%

Fuente: Elaboración propia.

Debido a que el rendimiento esperado y la desviación estándar de las acciones no tienen unidad de medida, regularmente se expresan en términos porcentuales.

La acción 1 es más rentable con un rendimiento de 13.00%, pero a su vez la dispersión de dichos rendimientos alrededor de la media presenta niveles mayores con un 8.00% en comparación con la acción 2, que presenta un rendimiento inferior, pero muestra una desviación estándar muy baja.

Además del riesgo y el rendimiento esperado, la TMP requiere el cálculo de las relaciones entre los rendimientos de estas acciones. Para este cálculo se puede emplear la covarianza o el coeficiente de correlación.

Definición. La **covarianza de los rendimientos entre dos acciones**, i y j , denotada por σ_{ij} o $Cov(R_i, R_j)$ se define por (Francis y Kim, 2013).

$$\sigma_{ij} = E\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\} = \sum_{s=1}^n p_s\{[r_{is} - E(R_i)][r_{js} - E(R_j)]\} \quad (1.3)$$

Definición. El **coeficiente de correlación entre dos acciones**, i y j se define por (Francis y Kim, 2013).

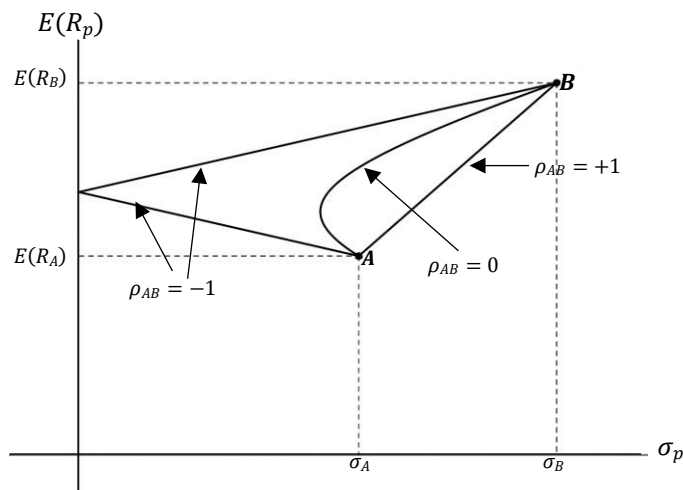
$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (1.4)$$

Ejemplo.

La Figura 1.1 muestra el efecto de la correlación sobre los activos A y B (en el Capítulo II damos una descripción de este efecto).

- Cuando $\rho_{AB} = +1$ el efecto de la correlación está representado en la recta marcada, e indica una perfecta relación lineal positiva entre los rendimientos de las acciones A y B.
- Cuando $\rho_{AB} = 0$ el efecto de la correlación está representado en la curva marcada, e indica la ausencia de relación lineal entre los rendimientos de las acciones A y B.
- Cuando $\rho_{AB} = -1$ el efecto de la correlación está representado por las rectas marcadas, e indica una perfecta relación lineal negativa entre los rendimientos de las acciones A y B.

Figura 1.1 Efecto de la correlación.



Fuente: Elaboración propia.

Sin embargo, un inversionista no sólo está interesado en medir el riesgo de una única acción, también está interesado en medir el riesgo cuando utiliza estas acciones para conformar un portafolio de inversión. A continuación, explicamos cómo medir el riesgo de un portafolio.

1.5.2 Estimación del rendimiento esperado y riesgo de un portafolio

Consideremos a R_p como la variable aleatoria del rendimiento de un portafolio p el cual consiste de n acciones individuales.

Definición. Las **proporciones, pesos o niveles de participación**, denotados por w_i , hacen referencia a la fracción del valor total del portafolio que será invertida en la acción i , y cumple con la siguiente condición

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (1.5)$$

La restricción de (1.5) se conoce como restricción presupuestal.

El **rendimiento de un portafolio** lo definimos como la siguiente combinación lineal

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i$$

Entonces tomando el valor esperado en ambos lados de la ecuación anterior, llegamos a lo siguiente.

Definición. El **rendimiento esperado del portafolio** p se define como

$$E(R_p) = E\left(\sum_{i=1}^n w_i R_i\right) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) \quad (1.6)$$

Donde:

w_i es el peso invertido en la acción i para $i = 1, \dots, n$.

$E(R_i)$ es el rendimiento esperado de la acción i para $i = 1, \dots, n$.

La esperanza matemática del rendimiento de un portafolio resulta ser el promedio de los n rendimientos esperados individuales, ponderados por la participación de cada acción individual en el portafolio.

También puede ser expresado como el producto entre el vector transpuesto de \mathbf{w} y el vector de rendimientos esperados individuales \mathbf{E} .

$$E(R_p) = \mathbf{w}^T \mathbf{E}$$

Donde:

$\mathbf{w}^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ es el vector de pesos de las n acciones

$\mathbf{E}^T = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ es el vector de los rendimientos esperados de las n acciones.

Definición. La **varianza del rendimiento del portafolio** p se define como la dispersión de la tasa de rendimiento del portafolio alrededor de su rendimiento esperado, denotada por σ_p^2 , y se calcula como:

$$\sigma_p^2 = E[(R_p - E(R_p))^2] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (1.7)$$

Los tres componentes que determinan el riesgo de un portafolio son los pesos de las acciones, la desviación estándar (o varianza) de cada acción, y el coeficiente de correlación (o covarianza) entre las acciones.

De la expresión 1.7, podemos observar que cuanto menor es la covarianza (o correlación) entre los rendimientos de las acciones individuales, menor es la variabilidad del portafolio. Por tanto, la capacidad de diversificación de un portafolio está en la correlación.

Los portafolios que incluyan acciones con la menor correlación posible (especialmente negativa) presentarán menor volatilidad que aquellos que incluyan acciones altamente correlacionadas.

La varianza del portafolio también puede representarse matricialmente como:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$$

Donde:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de las acciones del portafolio.

II. Modelo media-varianza de Markowitz

En la TMP, el modelo media-varianza de Markowitz (modelo M-V), tiene como objetivo determinar el *conjunto de portafolios eficientes* de entre los cuales el inversionista elegirá el que mejor satisfaga sus necesidades; para lograr dicho objetivo, se debe determinar la solución del mismo. Éste toma como base las definiciones explicadas en el capítulo I sobre el rendimiento, la varianza del rendimiento y las covarianzas del rendimiento; la solución del modelo brindará los pesos óptimos a invertir en cada acción.

El conjunto de portafolios eficientes, el cual forma parte del *conjunto de oportunidad*, estará representado en la *frontera eficiente*. Estos conceptos serán ilustrados mediante el análisis geométrico para un portafolio de tres acciones, éste consiste en graficar las *líneas de isomedia* y las *elipses de isovarianza*, los puntos de tangencia entre ambos gráficos generan la *línea crítica*.

Asimismo, expondremos las características principales de la frontera eficiente conformada por n acciones. En este apartado se enunciará el *teorema de la frontera eficiente*, que explica la localización del portafolio óptimo de un inversionista y que se encuentra en la intersección de la frontera eficiente y las curvas de indiferencia.

Posteriormente, se analizará la solución del modelo para un portafolio conformado por n acciones bajo el supuesto de que se permiten las ventas en corto, es decir, que un inversionista puede vender acciones que obtuvo en forma de préstamo. Además, encontraremos el conjunto de portafolios eficientes y graficaremos la frontera eficiente.

Adicionalmente, en el Apéndice A1 exponemos una extensión del Modelo M-V, el cual incorpora un activo libre de riesgo al conjunto de n acciones donde la frontera eficiente toma la forma de una línea recta.

El objetivo del presente capítulo es estudiar cuidadosamente los diversos elementos que contiene el Modelo M-V propuesto por Markowitz.

II.1 Portafolios eficientes

El modelo M-V es una propuesta de solución para el problema del portafolio, el cual consiste en determinar los pesos óptimos para las acciones candidatas a conformar un portafolio de inversión.

Este modelo se desarrolla sobre la base de comportamiento racional del inversionista, es decir, el inversionista desea rentabilidad y acepta cierto nivel de riesgo. Por lo que, para él un portafolio será eficiente si cumple la siguiente definición

Definición. Un portafolio p es eficiente si cumple con las siguientes condiciones:

1. p es legítimo⁷,
2. p tiene el mayor rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo, o, por el contrario,
3. p tiene el menor riesgo para un nivel dado de rendimiento.

El inversionista elegirá el portafolio p (que cumpla con sus exigencias) dentro de los que conforman al *conjunto eficiente*, cada uno de los portafolios de ese conjunto tendrá el menor riesgo para un nivel dado de rendimiento y, en el caso de dos y tres acciones estarán contenidos en la *línea crítica*, mientras que, en el caso de n acciones, este conjunto se localizará en la *frontera eficiente*.

II.1.1 Análisis geométrico del modelo media-varianza para tres acciones

Para comprender el modelo M-V, comenzamos analizándolo gráficamente; este procedimiento contiene a los conceptos de conjunto eficiente, líneas de isomedia, elipses de isovarianza y línea crítica. Estos elementos nos permitirán entender qué es la *frontera eficiente*. A continuación, enunciamos los términos mencionados.

Definición. Al conjunto formado por todos los portafolios eficientes se denomina **conjunto eficiente**.

⁷ Esta característica es mencionada en el trabajo de H. Markowitz (1959) titulado “*Portfolio selection, efficient diversification of investments*” la cual establece que un portafolio es legítimo sí y sólo sí (1) $w_i \geq 0$ y (2) $\sum w_i = 1$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$. Sin embargo, esta condición es tomada en cuenta únicamente en el análisis estándar del portafolio. En general, las restricciones del análisis del portafolio no necesitan ser las del análisis estándar, por lo que, esta característica no será considerada en este trabajo de tesis.

Líneas de isomedia y elipses de isovarianza

Definición: Las **líneas de isomedia** o **isomedias**, son rectas que tienen valores de $E(R_p)$ iguales a lo largo de la misma.

Definición. Una **elipse de isovarianza** es un lugar geométrico de puntos que representan portafolios con el mismo nivel de riesgo.

Con base en las definiciones anteriores, debemos expresar a $E(R_p)$ y σ_p^2 , en dos variables para así poderlas graficar en el plano (w_1, w_2) .

Por lo tanto, sean w_1 , w_2 y w_3 los pesos de las acciones que conforman el portafolio.

Por la ecuación (1.5) tenemos,

$$\begin{aligned}w_1 + w_2 + w_3 &= 1 \\ \Rightarrow w_3 &= 1 - w_1 - w_2\end{aligned}\quad (2.1)$$

Sustituyendo la ecuación (2.1) en la ecuación del rendimiento esperado del portafolio (1.6), obtenemos,

$$\begin{aligned}E(R_p) &= \sum_{i=1}^3 w_i E(R_i) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + w_3 E(R_3) \\ E(R_p) &= [E(R_1) - E(R_3)]w_1 + [E(R_2) - E(R_3)]w_2 + E(R_3)\end{aligned}\quad (2.2)$$

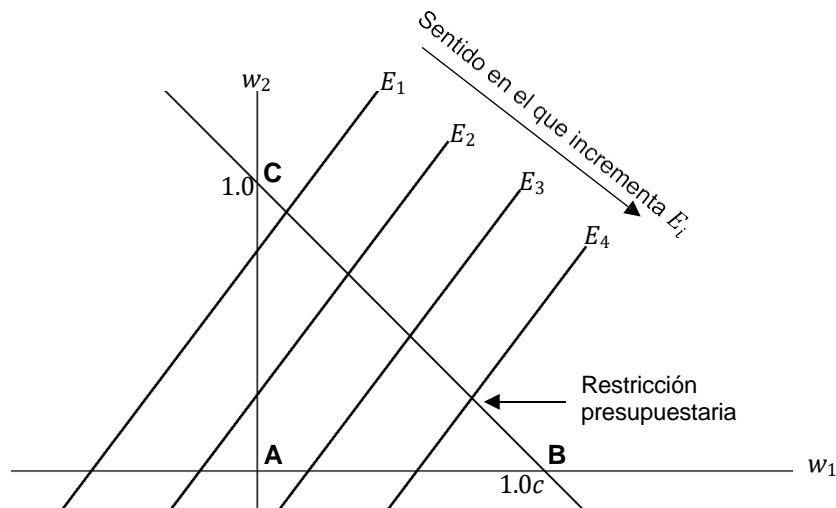
Sustituyendo la ecuación (2.1) en la ecuación de la varianza del rendimiento del portafolio (1.7), obtenemos,

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j \sigma_{ij} \\ &= w_1^2 \sigma_{11} + w_2^2 \sigma_{22} + w_3^2 \sigma_{33} + 2w_1 w_2 \sigma_{12} + 2w_1 w_3 \sigma_{13} \\ &\quad + 2w_2 w_3 \sigma_{23} \\ \sigma_p^2 &= (\sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{13})w_1^2 + (2\sigma_{33} + 2\sigma_{12} - 2\sigma_{13} - 2\sigma_{23})w_1 w_2 \\ &\quad + (\sigma_{22} + \sigma_{33} - 2\sigma_{23})w_2^2 + (-2\sigma_{33} + 2\sigma_{13})w_1 \\ &\quad + (-2\sigma_{33} + 2\sigma_{23})w_2 + \sigma_{33}\end{aligned}\quad (2.3)$$

Debido a que el rendimiento esperado del portafolio y la varianza del rendimiento del portafolio están en función de los pesos de las acciones w_1 y w_2 , podemos graficar las líneas de isomedia y las elipses de isovarianza en el plano (w_1, w_2) .

Para graficar las líneas de isomedia suponemos que $E(R_1)$, $E(R_2)$, $E(R_3)$ son valores conocidos tales que $E(R_1) \neq E(R_2) \neq E(R_3)$, además le damos diferentes valores a $E(R_p)$ para generar una familia de rectas (líneas de isomedia).

Figura 2.1 Líneas de isomedia



Fuente: Elaboración propia.

La Figura 2.1 representa una familia de líneas de isomedia⁸ donde a cada una de las E_i se les conoce como *isomedias*.

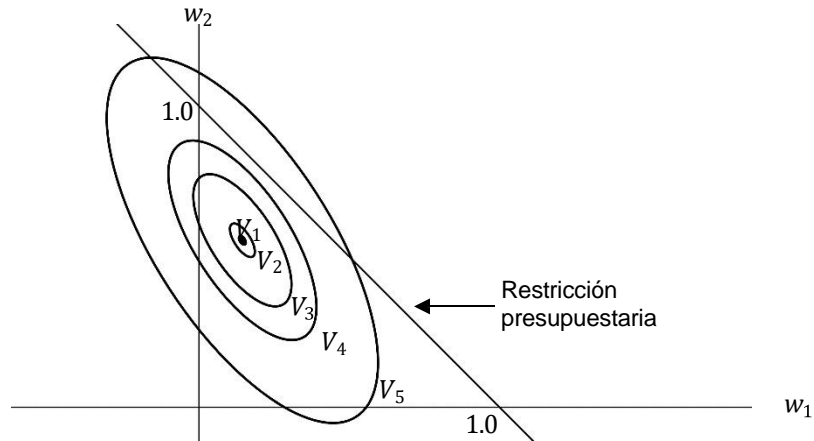
La característica principal de las isomedias es que son paralelas una con otra; los rendimientos esperados dentro y sobre el triángulo ABC son alcanzables sin violar la restricción presupuestaria.

Además, los inversionistas desean alcanzar la isomedia con mayor rendimiento esperado, sin embargo, esto no es posible debido a que implicaría más riesgo y también a que están limitados por la restricción presupuestaria.

⁸ La familia de líneas de isomedia no siempre tiene esta forma, dependerá de los rendimientos de las acciones que conformen el portafolio.

Por otra parte, para graficar las elipses de isovarianza suponemos que $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ son valores conocidos, además le damos diferentes valores a σ_p^2 , w_1 .

Figura 2.2 Elipses de isovarianza



Fuente: Elaboración propia.

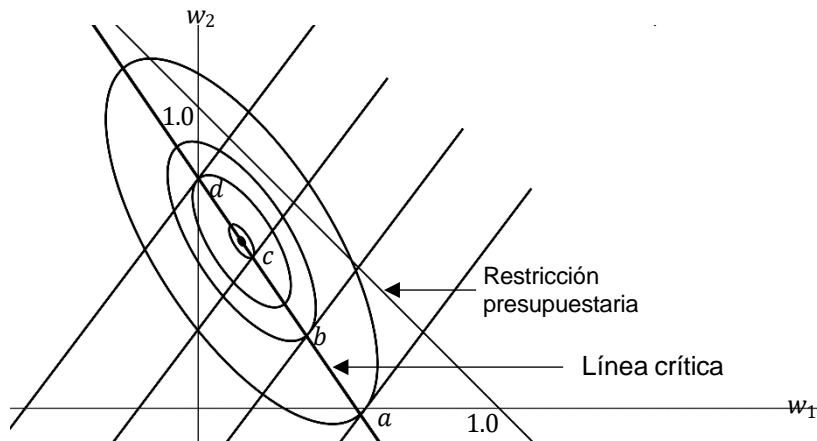
La figura 2.2 muestra una familia de elipses, cada elipse está compuesta por diferentes combinaciones de w_1 y w_2 . Las elipses más grandes representan mayor riesgo que las elipses interiores, éstas nunca se intersecan debido a que un punto en particular sobre la elipse no puede representar dos niveles diferentes de varianza del rendimiento del portafolio.

Para obtener la línea crítica intersecamos los gráficos de las isomedias e isovarianzas obtenidos.

Definición. La **línea crítica** es el lugar geométrico de todos los puntos que minimizan la varianza entre los portafolios con el mismo rendimiento esperado, está formada por los puntos de tangencia entre las isomedias y las isovarianzas.

La línea crítica es la representación gráfica del conjunto de oportunidad en el plano (w_1, w_2) .

Figura 2.3 La línea crítica



Fuente: Elaboración propia.

La línea crítica siempre pasa por el centro de las isovarianzas. Un punto está en la línea crítica si y sólo si éste minimiza la varianza para algún rendimiento esperado.

De acuerdo a la definición de portafolios eficientes, en la figura 2.3 podemos observar que los puntos a , b y c son portafolios eficientes ya que para un nivel dado de rendimiento minimizan el riesgo, a diferencia del portafolio d , el cual tiene una varianza mayor para un nivel dado de rendimiento.

Por lo tanto, los portafolios a , b y c conforman el *conjunto eficiente*.

En el caso de portafolios conformados por n acciones (con $n > 3$), no es posible graficar la línea crítica, debido a que ésta se grafica en el plano (w_1, w_2) . En este caso el conjunto eficiente se localiza en la *frontera eficiente*⁹ en el plano $[\sigma, E(R)]$.

Sin embargo, si queremos graficar la frontera eficiente para portafolios formados por dos y tres acciones solo basta con sustituir las ponderaciones de w_1 y w_2 en las fórmulas de rendimiento esperado y varianza del rendimiento del portafolio.

⁹ Por el momento, entenderemos a la frontera eficiente como la parábola que representa el conjunto de combinaciones de $[\sigma, E(R)]$ de todos los portafolios eficientes, más adelante daremos una descripción de la misma.

Ejemplo. Portafolios eficientes utilizando el análisis gráfico y construcción de la frontera eficiente para tres acciones.

En la siguiente tabla se muestran los valores de $E(R_i)$, σ_i^2 y σ_{ij} , de tres acciones pertenecientes al S&P/BMV IPC en el periodo julio 2007 a marzo 2011.

Tabla 2.1 Datos de entrada para un portafolio conformado por tres acciones.

Compañía	i	w_i	$E(R_i)$	σ_i^2	σ_{ij}
GMEXICO	1	w_1	2.68%	190.74	$\sigma_{12} = 26.27$
AMXL	2	w_2	0.16%	41.77	$\sigma_{23} = 24.37$
AC	3	w_3	1.54%	64.90	$\sigma_{13} = 44.73$

Fuente: Investing.com (2020).

Como se mencionó, el conjunto eficiente de un portafolio de tres acciones se encuentra graficando las líneas de isomedia y las elipses de isovarianza.

Primero graficaremos las líneas de isomedia, entonces, sustituyendo los valores de la Tabla 2.1 para $E(R_p)$ en la ecuación (2.2) obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
 E(R_p) &= \sum_{i=1}^3 w_i E(R_i) = 2.68w_1 + 0.16w_2 + 1.54w_3 \\
 &= [2.68 - 1.54]w_1 + [0.16 - 1.54]w_2 + 1.54 \\
 &= 1.14w_1 - 1.38w_2 + 1.54
 \end{aligned} \tag{2.2a}$$

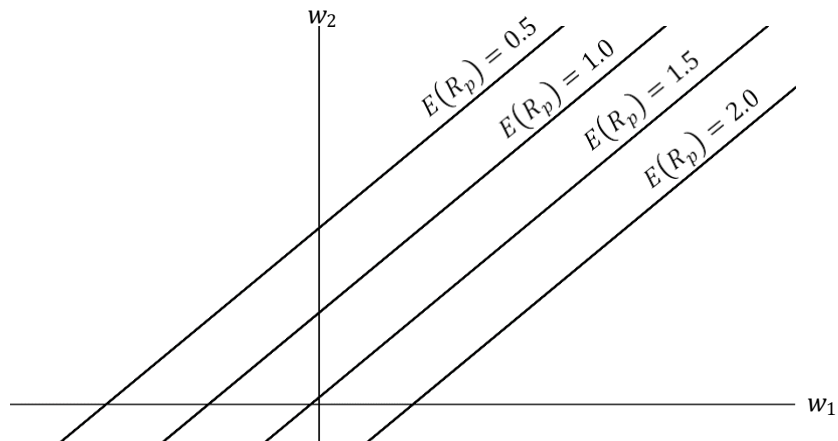
Ahora seleccionamos algunos valores para $E(R_p)$ en la vecindad de los valores esperados de las acciones en el portafolio.

Eligiendo los siguientes cuatro valores, 0.5%, 1.0%, 1.5% y 2.0% de $E(R_p)$ y utilizando la ecuación (2.2a), las ecuaciones para las cuatro líneas isomedia son:

$$\begin{aligned}
 E(R_p) &= 0.5\% = 1.14w_1 - 1.38w_2 + 1.54 \\
 E(R_p) &= 1.0\% = 1.14w_1 - 1.38w_2 + 1.54 \\
 E(R_p) &= 1.5\% = 1.14w_1 - 1.38w_2 + 1.54 \\
 E(R_p) &= 2.0\% = 1.14w_1 - 1.38w_2 + 1.54
 \end{aligned}$$

Una vez elegidos los valores de $E(R_p)$ graficamos las cuatro ecuaciones lineales en un plano que se pueden observar en la siguiente figura.

Figura 2.4 Líneas de isomedia de un portafolio conformado por tres acciones.



Fuente: Elaboración propia con información de las acciones presentadas en la tabla 2.1.

Para graficar las isovarianzas haremos uso de la ecuación (2.3).

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j \sigma_{ij} = \\ &= 166.18w_1^2 + 44.14w_1w_2 + 57.93w_2^2 - 40.34w_1 - 81.06w_2 \\ &\quad + 64.90 \end{aligned} \tag{2.3a}$$

Es necesario resolver la ecuación (2.3a) en términos de una de las variables tratando a la segunda variable como constante. Entonces, seleccionamos a w_1 como la variable a ser resuelta, y tomando a w_2 como una constante, la ecuación se reduce a una ecuación cuadrática de una variable.

Resolvimos la ecuación (2.3a) con la fórmula cuadrática, es decir, igualamos la ecuación (2.3a) con cero e identificamos a , b y c para sustituirlos en la fórmula general y encontrar los valores de x , de la siguiente manera.

$$166.18w_1^2 + 44.14w_1w_2 + 57.93w_2^2 - 40.34w_1 - 81.06w_2 + 64.90 - \sigma_p^2 = 0$$

$$a = 166.18$$

$$b = 44.14w_2 - 40.34$$

$$c = 57.93w_2^2 - 81.06w_2 + 64.90 - \sigma_p^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(44.14w_2 - 40.34)}{2(166.18)} \pm \frac{\sqrt{(44.14w_2 - 40.34)^2 - 4(166.18)(57.93w_2^2 - 81.06w_2 + 64.90 - \sigma_p^2)}}{2(166.18)}$$

La ecuación anterior es la solución de la ecuación (2.3a). Para graficar las isovarianzas es necesario resolver la fórmula general para obtener diferentes x (una por cada isovarianza), entonces, seleccionamos algunos valores para σ_p^2 y w_2 para determinar los puntos en la elipse isovarianza.

Una forma de seleccionar un valor para σ_p^2 es que sea ligeramente mayor que la varianza del PVM¹⁰ y seleccionar el valor de w_2 del PVM (o cercano a él) para obtener los dos primeros valores de w_1 . Por ejemplo, si tomamos $\sigma_p^2 = 38.9$ y $w_2 = 0.7$, entonces, la ecuación de la fórmula general produce los siguientes dos valores para w_1 .

$$w_1 = 0.15$$

$$w_1 = -0.09$$

Cualquier valor podría ser elegido tan grande como exceda la varianza del PVM (es decir, 36.40). De esta forma, podemos encontrar los valores de w_1 para un valor dado de w_2 y σ_p^2 .

Para calcular una serie de varianzas del portafolio usando la ecuación (2.3a), se comenzó cambiando a w_1 en 0.01 de forma ascendente.

Tabla 2.2 Puntos de isovarianza en el plano (w_1, w_2).

w_2	Dos valores de w_1		σ_p^2
<i>inferiores</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>
0.7	0.07	-0.01	36.71
<i>superiores</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>
<i>inferiores</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>
0.5	0.13	-0.02	39.20

¹⁰ PVM es el portafolio de varianza mínima debido a que no existe otro con varianza menor para un rendimiento esperado dado. En el Anexo B.1 mencionamos cómo obtenerlo mediante un método de prueba y error.

0.6	0.16	-0.08	39.20
0.7	0.16	-0.10	30.20
0.8	0.13	-0.10	39.20
0.9	0.05	-0.04	39.20
<i>superiores</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>
<i>inferiores</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>
0.2	0.21	-0.02	51.59
0.3	0.29	-0.12	51.59
0.4	0.32	-0.18	51.59
0.5	0.34	-0.23	51.59
0.6	0.34	-0.26	51.59
0.7	0.33	-0.27	51.59
0.8	0.31	-0.28	51.59
0.9	0.28	-0.27	51.59
1.0	0.23	-0.25	51.59
1.1	0.16	-0.21	51.59
1.2	0.03	-0.11	51.59
<i>superiores</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>
<i>inferiores</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>
-0.1	0.28	-0.01	73.90
0.0	0.38	-0.14	73.90
0.1	0.44	-0.23	73.90
0.2	0.48	-0.29	73.90
0.3	0.50	-0.34	73.90
0.4	0.51	-0.28	73.90
0.5	0.52	-0.41	73.90
0.6	0.51	-0.43	73.90
0.7	0.50	-0.45	73.90
0.8	0.49	-0.46	73.90
0.9	0.46	-0.46	73.90
1.0	0.43	-0.45	73.90

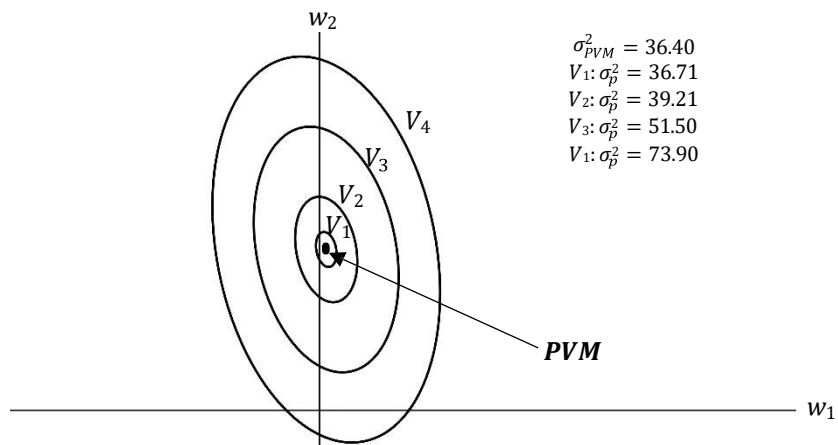
1.1	0.39	-0.44	73.90
1.2	0.33	-0.41	73.90
1.3	0.27	-0.37	73.90
1.4	0.18	-0.31	73.90
1.5	0.01	-0.16	73.90
<i>superiores</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>	<i>n. a.</i>

Fuente: Elaboración propia con datos de las acciones presentadas en la tabla 2.1.

Se deben elegir valores de w_2 tales que, el valor de la ecuación dentro de la raíz cuadrada no sea negativo, para garantizar que encontraremos soluciones para w_1 .

Los valores de w_1 y w_2 y las varianzas del portafolio en la tabla anterior son graficados en el plano (w_1, w_2) para obtener las elipses de isovarianza, mostradas en la siguiente figura, 2.5.

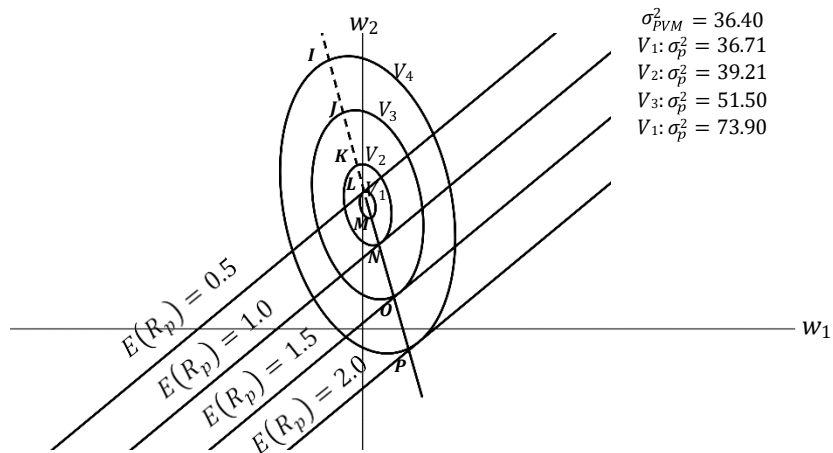
Figura 2.5 Elipses de isovarianza.



Fuente: Elaboración propia con información de las acciones presentadas en la tabla 2.1.

Una vez graficadas las líneas de isomedia y las elipses de isovarianza es posible determinar la línea crítica, solo debemos intersecar ambos gráficos, como podemos observar en la siguiente figura, 2.6.

Figura 2.6 Línea crítica.



Fuente: Elaboración propia con información de las acciones presentadas en la tabla 2.1.

De esta forma podemos determinar fácilmente el conjunto eficiente de portafolios.

Debido a que cada isovarianza traza un mismo nivel de riesgo, el punto donde el valor más alto de isomedia es tangente a una isovarianza, es un portafolio eficiente.

Entonces, el portafolio en el punto P gana el mayor rendimiento esperado, $E(R_p) = 2.0$, con una varianza de $V_4 = 73.90$. El punto I está también sobre la misma elipse de isovarianza, sin embargo, el portafolio en el punto I está dominado¹¹ ya que tiene un menor rendimiento esperado que el punto P .

En el mismo sentido, los portafolios N , O , y P son eficientes en los niveles de varianza 39.21, 51.50 y 73.90 respectivamente. La línea recta que comienza desde el PVM y conecta esos puntos es la línea crítica. Por otro lado, la línea crítica punteada que comienza en el PVM y conecta los puntos L , K , J e I indica portafolios ineficientes o dominados.

Una vez determinada la línea crítica, la frontera eficiente se grafica con facilidad.

Los pesos óptimos para cada portafolio se sustituyen en las fórmulas del rendimiento esperado y riesgo de cada portafolio para poder localizarlos en el plano $[\sigma_p, E(R_p)]$, en la Tabla 2.3 podemos observar los resultados.

¹¹ Se dice que un portafolio A domina a un portafolio B cuando para un mismo nivel de riesgo, el portafolio A tiene un mayor rendimiento esperado que el portafolio B.

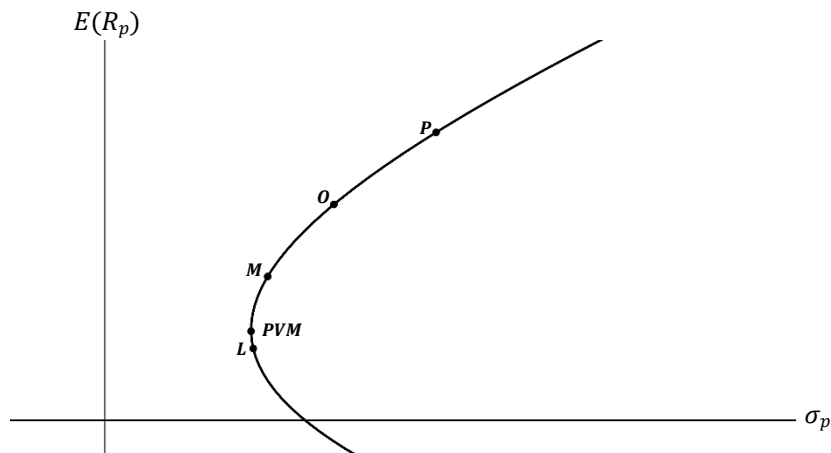
Tabla 2.3 Pesos de los portafolios en la línea crítica.

Punto	w_1	w_2	w_3	$E(R_p)$	σ_p^2	σ_p
L	0.004	0.757	0.239	0.50%	36.71	6.06
PVM	0.030	0.688	0.282	0.62%	36.40	6.03
N	0.109	0.481	0.411	1.00%	39.21	6.26
O	0.213	0.205	0.582	1.50%	51.50	7.18
P	0.318	-0.071	0.753	2.00%	73.90	8.60

Fuente: elaboración propia con datos de las acciones presentadas en la tabla 2.1.

La frontera eficiente se encuentra graficando $E(R_p)$ y σ_p como se muestra en la Figura 2.7.

Figura 2.7 Frontera eficiente de portafolios conformados por tres acciones.



Fuente: Elaboración propia con información de las acciones presentadas en la tabla 2.1.

Una vez obtenida la frontera eficiente, el inversionista podrá elegir el portafolio que mejor se adecue a sus necesidades.

II.2 Frontera eficiente para el modelo media-varianza con n acciones

En un caso más general y que se presenta con mayor frecuencia en la práctica, los portafolios de inversión están conformados por varias acciones. Esto puede deberse a que el mercado de valores ofrece una gran variedad de acciones con diferentes rendimientos y riesgos asociados.

Todos los portafolios que pueden ser contruidos para la elección del inversionista forman parte del *conjunto de oportunidad* y en éste se encuentra localizada la *frontera eficiente*. El inversionista elegirá el *portafolio óptimo* que satisfaga sus necesidades y éste se ubica en la intersección de la frontera eficiente con las curvas de indiferencia; esta premisa es expuesta por el *teorema de la frontera eficiente*.

En este apartado analizamos la forma del conjunto de oportunidad en el caso de n acciones bajo los supuestos donde se permiten las ventas en corto¹² y en el que no se permiten las ventas en corto. Además, exponemos las características de la frontera eficiente.

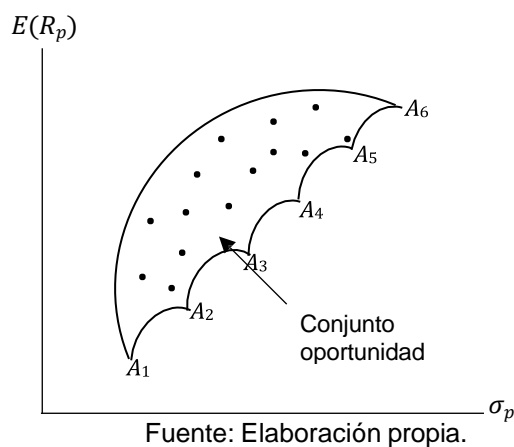
En el presente trabajo, las ventas en corto inician cuando un inversionista adquiere acciones en préstamo de una casa de bolsa y las vende en el mercado. Posteriormente, cuando el precio de la acción disminuye, el vendedor en corto readquiere las acciones y las devuelve a la casa de bolsa (Gitman y Joehnk, 2009).

II.2.1 Conjunto de oportunidad

Definición. El **conjunto de oportunidad** o **conjunto factible**, representa a las n acciones individuales y a todos los portafolios que se pueden formar por las n acciones.

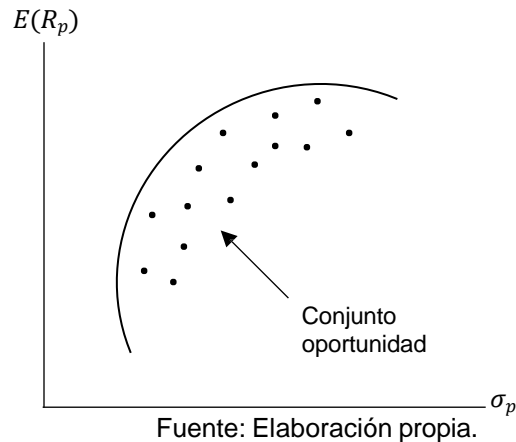
El conjunto de oportunidad puede ser graficado en el plano $[\sigma_p, E(R_p)]$ y está representado en las figuras 2.8 y 2.9.

Figura 2.8 Conjunto de oportunidad formado por varias acciones sin ventas en corto.



¹² Las **ventas en corto** se definen como la práctica de vender títulos adquiridos en préstamo (Gitman y Joehnk, 2009).

Figura 2.9 Conjunto de oportunidad formado por varias acciones con ventas en corto.



El conjunto de todos los posibles portafolios formados por n acciones se encuentra, ya sea, sobre o dentro de la frontera del conjunto de oportunidad.

Cuando no se permiten ventas en corto, el conjunto de oportunidad tiene la forma mostrada en la figura 2.8. Los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6 representan a las acciones, y la curva comprendida entre cada par de acciones se genera por el *efecto de la correlación* (más adelante describiremos este efecto).

Cuando las ventas en corto son permitidas, todos los posibles portafolios se encuentran sobre o detrás de la frontera del conjunto de oportunidad mostrado en la figura 2.9.

II.2.2 Diversificación de Markowitz

La *Diversificación de Markowitz* refiere a su creador, H. M. Markowitz; ésta difiere de la diversificación simple (o aleatoria).

La diversificación aleatoria consiste en agregar valores seleccionados al azar y combinarlos en proporciones iguales, sin ningún conocimiento de las desviaciones estándar ni de las correlaciones de los valores (Reyes Loyola y Rodríguez Calvo, 2010).

Ejemplo. Diversificación aleatoria vs. diversificación de Markowitz

La tabla 2.4 muestra los datos estadísticos respecto a las tasas de rendimiento, varianza y covarianza de las acciones ALFAA, ASURB y FEMSA pertenecientes al S&P/BMV IPC en el periodo julio 2007 a marzo 2011.

Tabla 2.4 Datos de tres acciones.

Compañía	i	w_i	$E(R_i)$	σ_i^2	σ_{ij}
ALFAA	1	w_1	2.44%	211.83	$\sigma_{12} = 81.30$
ASURB	2	w_2	1.07%	128.41	$\sigma_{13} = 69.48$
FEMSA	3	w_3	1.44%	65.49	$\sigma_{23} = 31.86$

Fuente: Elaboración propia con información de Investing.com (2020).

Con la diversificación simple, w_1 , w_2 y w_3 tendrían la misma proporción en el portafolio de inversión, es decir, $w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{3}$

El rendimiento esperado y varianza de ese portafolio es igual a

$$E(R_p) = 2.44 \left(\frac{1}{3}\right) + 1.07 \left(\frac{1}{3}\right) + 1.44 \left(\frac{1}{3}\right) = 1.65\%$$

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = & \left(\frac{1}{3}\right)^2 (211.83) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 (128.41) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 (65.49) + 2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) (81.30) \\ & + 2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) (69.48) + 2 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right) (31.86) = 85.67 \end{aligned}$$

Por otro lado, con la diversificación de Markowitz, las proporciones¹³ de cada acción serían $w_1 = 0.237$, $w_2 = 0.066$ y $w_3 = 0.697$ con $E(R_p) = 1.65\%$ y $\sigma_p^2 = 72.73$.

A través de este ejemplo, podemos observar que, para el mismo nivel de rendimiento esperado (1.65%), a través de la diversificación aleatoria se obtiene mayor riesgo (85.67), mientras que por medio de la diversificación de Markowitz se estima un riesgo de 72.73.

Definición. La **diversificación de Markowitz** implica combinar acciones con una correlación positiva menos que perfecta para reducir el riesgo en el portafolio, sin sacrificar ninguno de los rendimientos esperados del portafolio.

En general, cuanto más bajas sean las correlaciones de las acciones de un portafolio, menos riesgoso será el portafolio resultante.

¹³ Más adelante decimos como obtener estos resultados.

Al tratar de hacer que la varianza de los rendimientos sea pequeña, no es necesario invertir en muchas acciones, sino evitar invertir en acciones con alta correlación entre ellas.

Variación del riesgo según el coeficiente de correlación

La correlación entre el rendimiento de cada par de acciones seleccionados es importante para determinar el riesgo de invertir en el portafolio; el resultado de incorporar el *efecto de la correlación* al evaluar el riesgo de un portafolio permite reducir el riesgo conforme aumenta el número de acciones que se seleccionan.

A la variación del riesgo del portafolio según el coeficiente de correlación (o por la covarianza) se le conoce como **efecto de la correlación** o **efecto de la covarianza**. Para explicarlo suponga que el portafolio de inversión estará conformado por dos acciones cuyos rendimientos esperados y varianzas no son iguales (i.e. $R_1 \neq R_2$ y $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$).

El rendimiento esperado y varianza de todos los posibles portafolios se determina usando las ecuaciones 1.6 y 1.7.

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^2 w_i E(R_i) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}$$

o,

$$\sigma_p = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_{12}}$$

La covarianza dentro de la raíz se reescribe usando $\sigma_{12} = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$. Entonces,

$$\sigma_p = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2}$$

- Cuando los portafolios se forman a partir de dos acciones y el coeficiente de correlación entre esas dos acciones es $\rho_{12} = +1$, el rendimiento esperado y la desviación estándar del portafolio son,

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2} \\ &= \sqrt{(w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2} = w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2\end{aligned}\quad (2.5)$$

De la ecuación (2.4)

$$w_1 = \frac{E(R_p) - E(R_2)}{E(R_1) - E(R_2)} \quad (2.6)$$

Sustituyendo w_1 en la ecuación (2.5) y reorganizando términos obtenemos,

$$E(R_p) = \left[\frac{E(R_1) - E(R_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} \right] \sigma_p + \left[\frac{\sigma_1 E(R_2) - \sigma_2 E(R_1)}{\sigma_1 - \sigma_2} \right] \quad (2.7)$$

La ecuación (2.7) representa la línea recta que conecta la acción 1 y 2 para $\rho_{12} = +1$ en la figura 2.10.

- Cuando el coeficiente de correlación entre las dos acciones es $\rho_{12} = -1$, el rendimiento esperado y la desviación estándar del portafolio son

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 - 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2} = \sqrt{(w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2)^2} \\ &= |w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2|\end{aligned}\quad (2.9)$$

Sustituyendo la ecuación (2.6) en la ecuación (2.9) y reorganizando los términos obtenemos

$$\sigma_p = \left| \frac{E(R_p)[\sigma_1 + \sigma_2] - [\sigma_1 E(R_2) + \sigma_2 E(R_1)]}{E(R_1) - E(R_2)} \right| \quad (2.10)$$

Si $w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2 > 0$, o de forma equivalente, si $E(R_p) > \frac{\sigma_1 E(R_2) + \sigma_2 E(R_1)}{[\sigma_1 + \sigma_2]}$,

entonces

$$E(R_p) = \left[\frac{E(R_1) - E(R_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] \sigma_p + \left[\frac{\sigma_1 E(R_2) + \sigma_2 E(R_1)}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] \quad (2.11)$$

La ecuación (2.11) representa a la recta que pasa por los puntos $(0, \frac{\sigma_1 E(R_2) + \sigma_2 E(R_1)}{\sigma_1 + \sigma_2})$ y $(\sigma_2, E(R_2))$ para $\rho_{12} = -1$ en la figura 2.10.

Si $w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2 < 0$, o de forma equivalente, si $E(R_p) < \frac{\sigma_1 E(R_2) + \sigma_2 E(R_1)}{[\sigma_1 + \sigma_2]}$,

entonces

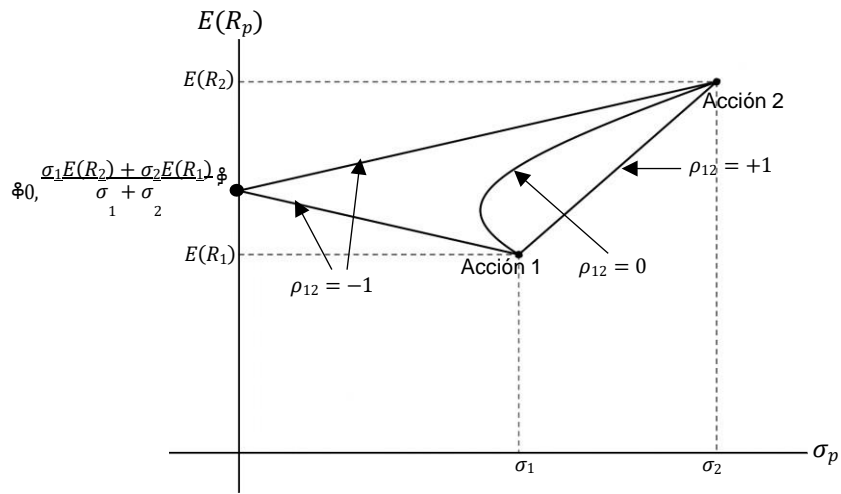
$$E(R_p) = - \left[\frac{E(R_1) - E(R_2)}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] \sigma_p + \left[\frac{\sigma_1 E(R_2) + \sigma_2 E(R_1)}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) representa a la recta que pasa por los puntos $(0, \frac{\sigma_1 E(R_2) + \sigma_2 E(R_1)}{\sigma_1 + \sigma_2})$ y $(\sigma_1, E(R_1))$ para $\rho_{12} = -1$ en la figura 2.10.

Sin embargo, debido a la volatilidad de los mercados, no es común encontrar acciones perfectamente correlacionados (de manera positiva o negativa), sino que es más frecuente que las acciones presenten un valor de correlación entre -1 y $+1$.

La forma de representar el riesgo-rendimiento de la frontera eficiente cuando $-1 < \rho_{12} < +1$, es a través de una parábola localizada a la derecha del eje vertical del plano contenida en el triángulo formado por la frontera eficiente cuando $\rho_{12} = -1$ y $\rho_{12} = +1$, como se muestra en la figura 2.10.

Figura 2.10 Efecto de la correlación sin ventas en corto.

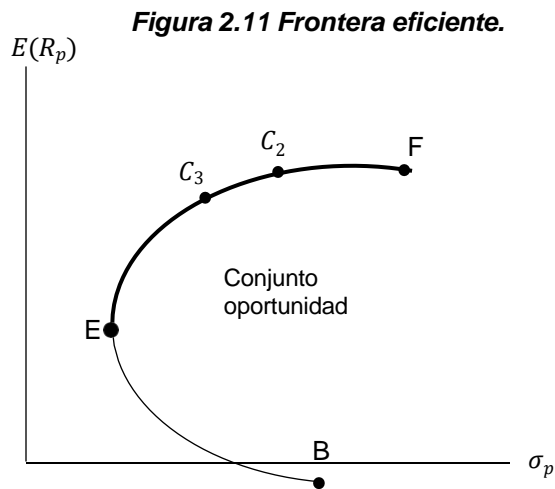


Fuente: Elaboración propia.

II.2.3 Frontera eficiente para el modelo media-varianza

La frontera eficiente puede ser representada mediante el conjunto de oportunidad, la figura 2.11 muestra el conjunto de oportunidad de portafolios formados por varias acciones.

Definición. El conjunto de combinaciones de riesgo-rendimiento de todos los portafolios eficientes es denominada **frontera eficiente**.



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 2.11 los portafolios entre los puntos E y F son todos eficientes, por tanto, conforman la frontera eficiente, dichos portafolios dominan al resto de portafolios en el conjunto de oportunidad.

La frontera eficiente de la figura anterior, está limitada en un extremo por el punto E , el cual es llamado *portafolio de varianza mínima* (PVM) y en el punto final por el punto F , llamado *portafolio de rendimiento máximo* (PRM).

El **portafolio de varianza mínima** es llamado así ya que no existe otro portafolio con varianza menor para un nivel dado de rendimiento. Y el nombre del **portafolio de rendimiento máximo** se debe a que no existe otro portafolio con rendimiento esperado mayor para un nivel dado de desviación estándar.

Hirschliefer (1964, 79) expresó que la curvatura de la frontera eficiente es opuesta a la de las curvas de indiferencia en el plano $[\sigma_p, E(R_p)]$ debido al efecto de la covarianza, ya que al moverse a valores más altos de rendimiento esperado reduce progresivamente el número de activos que pueden mantenerse en combinación para reducir el riesgo.

Las curvas de indiferencia¹⁴ para un inversionista con aversión al riesgo son convexas lejos del eje $E(R_p)$ y la frontera eficiente es cóncava hacia el eje $E(R_p)$ debido al efecto de la covarianza. La explicación de la relación entre las curvas de indiferencia y la frontera eficiente se puede revisar en Francis y Kim (2013).

Teorema de la frontera eficiente: El portafolio óptimo para un inversionista adverso al riesgo estará localizado sobre la frontera eficiente.

Francis y Kim (2013) prueban el teorema al señalar que las curvas de indiferencia convexas de un inversionista adverso al riesgo¹⁵ representan una utilidad esperada creciente a medida que uno se mueve de una isocuanta¹⁶ a otra en dirección noroeste. Ya que (1) el inversionista busca un portafolio en la isocuanta más al noroeste posible, (2) el conjunto de oportunidades es cóncavo en su límite noroeste, y (3) el límite noroeste

¹⁴ Una curva de indiferencia nos muestra las distintas canastas o combinaciones de bienes que permiten obtener un mismo nivel de utilidad (Garavito, 2014).

¹⁵ Las curvas de indiferencia del inversionista establecen la relación entre el riesgo y el rendimiento esperado; es distinta para cada inversionista ya que se determina por su grado de aversión al riesgo.

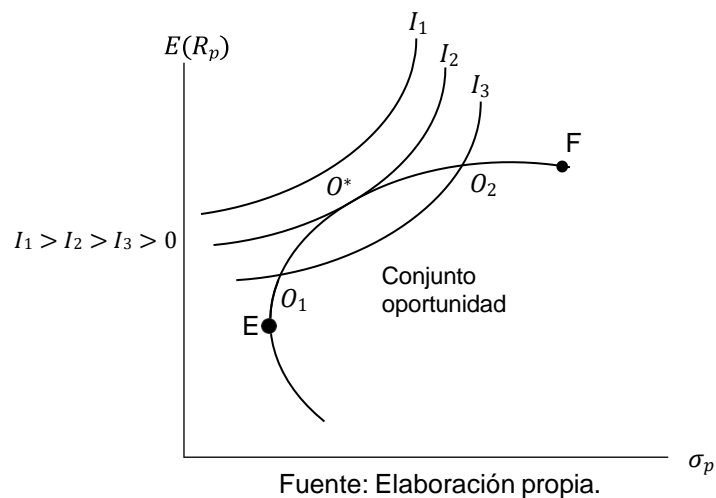
¹⁶ Expresa la misma satisfacción (utilidad) en toda su extensión.

del conjunto de oportunidades es por definición la frontera eficiente, por lo tanto, el portafolio óptimo del inversionista será un portafolio eficiente.

En la figura 2.12 se muestra la identificación del portafolio óptimo O^* de un inversionista adverso al riesgo. Los portafolios O_1 y O_2 , que se encuentran sobre I_1 , otorgan la misma utilidad esperada y además son eficientes. Sin embargo, O^* también es factible y proporciona un monto mayor de utilidad esperada porque se encuentra sobre I_2 .

En consecuencia, se prefiere O^* a O_1, O_2 , o cualquier otro portafolio sobre I_1 . Finalmente, aunque se prefiere I_3 a I_2 , no existen portafolios que toquen a I_3 .

Figura 2.12 Identificando el portafolio óptimo para el modelo de Markowitz.



Por lo tanto, el portafolio óptimo, O^* , es un punto de tangencia entre la frontera eficiente y la curva de indiferencia más alta posible. Sin embargo, la elección del portafolio óptimo depende del grado de aversión al riesgo del inversionista.

Es necesario aclarar que la frontera eficiente es algo objetivo y cuantificable, mientras que las curvas de indiferencia son de tipo subjetivo, y, por esta razón, difíciles de medir (Dubova, 2005).

II.3 Solución analítica del modelo media-varianza para determinar la frontera eficiente

En el modelo media-varianza se aplican las definiciones explicadas en el capítulo I acerca de la evaluación del riesgo y rendimiento de las acciones, así como todos los conceptos explicados en este capítulo.

Entender las bases teóricas del modelo nos permite dar una solución al problema del portafolio encontrando los pesos óptimos de los portafolios eficientes formados por cualquier número de acciones.

En este apartado se resuelve el problema del portafolio para el caso sin un activo libre se riesgo. Se utilizará notación matricial y vectorial.

II.3.1 Determinación de la frontera eficiente para el modelo media-varianza

Para identificar un portafolio sobre la frontera eficiente, es necesario obtener los pesos para el portafolio que minimicen la varianza, σ_p^2 , en un nivel dado de rendimiento esperado, $E(R_p)$.

El conjunto de portafolios eficientes puede calcularse resolviendo el siguiente problema:

$$\text{Minimizar } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (2.13)$$

Sujeto a

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i) = \mathbf{w}^T \mathbf{E} \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 = \mathbf{w}^T \mathbf{1} \quad (2.15)$$

Donde:

$\boldsymbol{\Sigma}$ es la matriz ($n \times n$) de varianzas y covarianzas,

$\mathbf{w}^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ es el vector de pesos de las n acciones,

$\mathbf{E}^T = [E(R_1), E(R_2), \dots, E(R_n)]$ es el vector de rendimientos esperados y,

$\mathbf{1}^T = (1, 1, \dots, 1)$ es el vector de n unos.

Las ecuaciones (2.14) y (2.15) son las restricciones para minimizar la función objetivo descrita en la ecuación (2.13) (i.e. minimizar la varianza). La primera restricción requiere que se alcance algún nivel deseado de rendimiento esperado del portafolio, y la segunda, es la restricción presupuestal, la cual requiere que los pesos sumen 1.

El problema anterior adopta esa forma si se asume que hay ventas en corto. Si no es el caso, se añade la restricción de no negatividad de las w_i 's, y se resuelve con las condiciones de Kuhn-Tucker, dichas condiciones optimizan funciones objetivo no lineales con restricciones de desigualdad. En este trabajo nos enfocaremos en el caso en que se permiten las ventas en corto.

Solución del modelo media-varianza de Markowitz

Se puede encontrar la solución del modelo media-varianza de Markowitz empleando los multiplicadores de Lagrange, ya que las restricciones son de igualdad.

Además, utilizando notación matricial y combinando las restricciones junto con la ecuación (2.13), nos permite formar la función objetivo que se describe a continuación,

$$\text{Minimizar } L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} + \lambda [E(R_p) - \mathbf{w}^T \mathbf{E}] + \gamma (1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1})$$

Donde λ y γ son multiplicadores de Lagrange.

El portafolio de varianza mínima se encuentra al determinar las condiciones de primer orden, es decir, encontrando la solución del sistema de $n + 2$ derivadas parciales, de la siguiente manera

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda \mathbf{E} - \gamma \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E(R_p) - \mathbf{w}^T \mathbf{E} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 0 \quad (2.18)$$

La ecuación (2.16) es un sistema de n derivadas parciales.

La matriz de varianzas y covarianzas, Σ , es una matriz definida positiva¹⁷, por lo que las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para un óptimo global.

Usando la ecuación (2.16) tenemos

$$\mathbf{w} = \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{E} + \gamma \Sigma^{-1} \mathbf{1} \quad (2.19)$$

Combinando las ecuaciones (2.17) y (2.19) producen

$$E(R_p) = \mathbf{w}^T \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{w} = \lambda (\mathbf{E}^T \Sigma^{-1} \mathbf{E}) + \gamma (\mathbf{E}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) \quad (2.20)$$

Combinando las ecuaciones (2.18) y (2.19) tenemos

$$1 = \mathbf{w}^T \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{w} = \lambda (\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{E}) + \gamma (\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}) \quad (2.21)$$

Resolviendo las ecuaciones (2.20) y (2.21), con respecto a λ y γ producen

$$\lambda = \frac{CE(R_p) - A}{D} \quad (2.22)$$

$$\gamma = \frac{B - AE(R_p)}{D} \quad (2.23)$$

Donde

$$A = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{E}$$

$$B = \mathbf{E}^T \Sigma^{-1} \mathbf{E}$$

$$C = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{E}$$

$$D = BC - A^2$$

La inversa de una matriz definida positiva también es una matriz definida positiva, por lo tanto $B > 0$ y $C > 0$. Por la desigualdad Cauchy-Schwarz $BC > A^2$. Entonces, $D > 0$.

Al sustituir las ecuaciones (2.22) y (2.23) en la ecuación (2.19) nos proporciona los pesos óptimos para los portafolios eficientes de media-varianza, como sigue:

¹⁷ Una matriz cuadrada A se llama *definida positiva* si $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_p &= \left[\frac{CE(R_p) - A}{D} \right] \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{E} + \left[\frac{B - AE(R_p)}{D} \right] \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \\ &= \mathbf{g} + \mathbf{h}E(R_p) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Donde

$$\mathbf{g} = \frac{1}{D} (B\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - A\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E}) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{D} (C\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{E} - A\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}) \quad (2.26)$$

Los pesos óptimos de los portafolios eficientes son representados como una función lineal del nivel dado de rendimiento esperado del portafolio, $E(R_p)$, ya que \mathbf{g} y \mathbf{h} son constantes.

Por lo tanto, cualquier portafolio que puede ser representado por la ecuación (2.24) es un *portafolio eficiente*. La *varianza del portafolio eficiente* p se calcula como,

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}_p^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_p \quad (2.27)$$

Gráfica de la frontera eficiente para el modelo media-varianza

Sea \mathbf{w}_p el vector de pesos óptimos para un portafolio p localizado sobre la frontera eficiente determinado por la ecuación (2.16), la varianza del portafolio puede expresarse como,

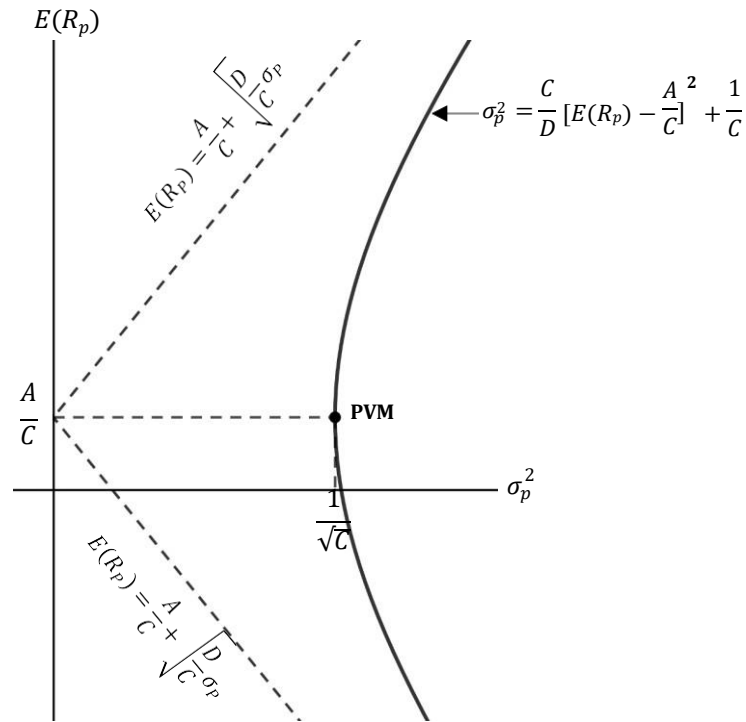
$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}_p^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_p = [\mathbf{g} + \mathbf{h}E(R_p)]^T \boldsymbol{\Sigma} [\mathbf{g} + \mathbf{h}E(R_p)] \quad (2.28)$$

Reescribiendo la ecuación (2.28) y usando la definición de los valores \mathbf{g} y \mathbf{h} de las ecuaciones (2.25) y (2.26) tenemos

$$\sigma_p^2 = \frac{C}{D} \left[E(R_p) - \frac{A}{C} \right]^2 + \frac{1}{C} \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) representa una parábola en el plano media-desviación estándar con vértice $[\sigma_p, E(R_p)] = (\frac{1}{\sqrt{C}}, \frac{A}{C})$ o una hipérbola en el plano media-varianza con vértice $[\sigma_p^2, E(R_p)] = (\frac{1}{C}, \frac{A}{C})$.

Figura 2.16 Frontera eficiente en el plano $[\sigma_p^2, E(R_p)]$.



Fuente: Elaboración propia.

Sabemos que las hipérbolas tienen dos asíntotas que pasan a través del centro de la misma (líneas punteadas en la figura 2.16). El centro de la hipérbola se encuentra sobre el eje vertical en el punto $\frac{A}{C}$, i.e. tiene coordenadas $(0, \frac{A}{C})$. Desde este centro, las dos asíntotas pueden ser vistas como las rectas que provienen del centro con pendientes iguales a $\sqrt{\frac{D}{C}}$ y $-\sqrt{\frac{D}{C}}$ respectivamente. Así, las ecuaciones de las asíntotas son,

$$E(R_p) = \frac{A}{C} + \sqrt{\frac{D}{C}} \sigma_p$$

$$E(R_p) = \frac{A}{C} - \sqrt{\frac{D}{C}} \sigma_p$$

Como podemos observar en la figura 2.16, el PVM está sobre el vértice de la hipérbola, entonces, su rendimiento medio es $E(R_{PVM}) = A/C$, y su varianza es $\sigma_{PVM}^2 = 1/C$.

Para determinar los pesos del PVM utilizamos la ecuación (2.19). Es decir,

$$\mathbf{w}_{PVM} = \lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{E} + \gamma \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}$$

Los multiplicadores de Lagrange se convierten en

$$\lambda = \frac{CE(R_p) - A}{D} = 0$$

$$\gamma = \frac{B - AE(R_p)}{D} = \frac{1}{C}$$

Debido a que $E(R_p) = A/C$ para el PVM y $D = BC - A^2$. Entonces, los pesos para el PVM se determinan de la siguiente manera.

$$\mathbf{w}_{PVM} = \frac{1}{C} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}$$

Ejemplo. Determinación de la frontera eficiente para el modelo media-varianza.

Considere las tres acciones citadas en la tabla 2.1. Sus rendimientos esperados y matriz de covarianza son:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E(r_1) & 2.68 \\ E(r_2) & 0.16 \\ E(r_3) & 1.54 \end{bmatrix} \text{ y } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 \end{pmatrix}$$

Deseamos encontrar los pesos óptimos y desviación estándar para un portafolio eficiente con rendimiento esperado de 1.8%.

Sol:

Usamos la ecuación (2.24) para calcular los pesos óptimos para las tres acciones del portafolio eficiente p .

$$\mathbf{w}_p = \left[\frac{CE(R_p) - A}{D} \right] \Sigma^{-1} \mathbf{E} + \left[\frac{B - AE(R_p)}{D} \right] \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{g} + \mathbf{h}E(R_p)$$

Donde

$$A = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2.68 \\ 0.16 \\ 1.54 \end{pmatrix} = 0.0172$$

$$B = \mathbf{E}^T \Sigma^{-1} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2.68 & 0.16 & 1.54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2.68 \\ 0.16 \\ 1.54 \end{pmatrix} = 0.0612$$

$$C = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.0275$$

$$D = BC - A^2 = (0.0172)(0.0612) - (0.0275)^2 = 0.0014$$

Ahora calculamos los valores de \mathbf{g} y \mathbf{h}

$$\mathbf{g} = \frac{1}{D} (B \Sigma^{-1} \mathbf{1} - A \Sigma^{-1} \mathbf{E}) = \begin{pmatrix} -0.1007 \\ 1.0328 \\ 0.0679 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{D} (C \Sigma^{-1} \mathbf{E} - A \Sigma^{-1} \mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 0.2092 \\ -0.5518 \\ 0.0679 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{w}_p = \begin{pmatrix} -0.1007 \\ 1.0328 \\ 0.0679 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2092 \\ -0.5518 \\ 0.0679 \end{pmatrix} (1.8) = \begin{pmatrix} 0.28 \\ 0.04 \\ 0.68 \end{pmatrix}$$

La varianza mínima para el nivel de rendimiento esperado dado (1.8%) es calculada con los pesos de inversión óptimos como sigue

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}_p^T \Sigma \mathbf{w}_p = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.04 & 0.68 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.28 \\ 0.04 \\ 0.68 \end{pmatrix} = 63.79$$

Así, la desviación estándar del portafolio eficiente es

$$\sigma_p = \sqrt{63.79} = 7.99\%$$

Repitiendo el mismo procedimiento para un rendimiento esperado igual a 2.1%, obtenemos los siguientes pesos óptimos:

$$\mathbf{w}_q = \begin{pmatrix} 0.34 \\ -0.13 \\ 0.79 \end{pmatrix}$$

La varianza mínima para el nivel de rendimiento esperado igual a 2.1% es:

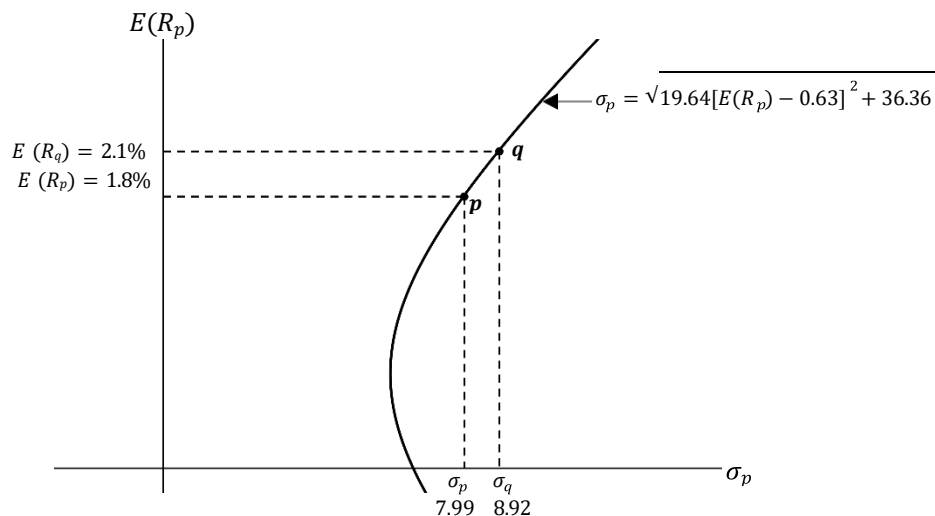
$$\sigma_q^2 = 79.55$$

Por último, su desviación estándar es:

$$\sigma_q = \sqrt{79.55} = 8.92\%$$

Esta técnica de solución puede ser repetida de forma iterada usando valores diferentes para la restricción de rendimiento esperado, de esta forma, podemos calcular todos los valores de riesgo-rendimiento para los portafolios eficientes. La figura 2.17 ilustra los dos portafolios eficientes p y q obtenidos.

Figura 2.17 Dos portafolios eficientes sin un activo libre de riesgo.



Fuente: Elaboración propia con información de las acciones presentadas en la tabla 2.1.

En la figura 2.17 se puede observar que para un rendimiento de 2.1% el riesgo es 8.92, el cual no es mayor al riesgo de ninguna acción individual, lo mismo sucede con un rendimiento de 1.8%; además el portafolio p tiene ponderaciones positivas, es decir, no implica ventas en corto, con lo cual no es necesario otorgar préstamo ni endeudarse para invertir en ese portafolio.

III. Modelo de índice único

La observación de los precios de las acciones revela que cuando el mercado sube (medido por cualquiera de los índices bursátiles disponibles), la mayoría de las acciones tienden a subir de precio, y cuando el mercado baja, la mayoría de las acciones tienden a bajar de precio (Elton et al., 2014).

Como sabemos mediante el análisis de regresión podemos estudiar la relación entre variables, por esta razón, en este capítulo la utilizaremos para analizar la correlación entre un índice bursátil y una acción. De modo que comenzaremos recordando algunos elementos de esta técnica estadística.

Modelo de regresión lineal simple

El modelo de **regresión lineal simple** consiste en una relación lineal entre una variable x conocida como variable **predictora** o **regresora**, y una variable de **respuesta** y , la cual genera una recta con la siguiente forma.

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \quad (3.1)$$

Donde α es la ordenada al origen y β la pendiente.

En la ecuación (3.1), ε es una variable aleatoria, que explica por qué este modelo no ajusta exactamente los datos, y es conocida como **error**. Por lo que y también es variable aleatoria; x puede ser vista como un valor observado de una variable aleatoria X o como valores fijos elegidos antes de observar la variable respuesta.

Estimación de α , β y σ_ε^2 por mínimos cuadrados

Supongamos que hay n pares de datos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ muestrales.

La estimación de α , β y σ_ε^2 por mínimos cuadrados es tal que, la suma de los cuadrados de las diferencias entre las observaciones y_i y la línea recta, sea mínima. Este método reescribe la ecuación (3.1) como,

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Utilizamos la ecuación (3.2) para obtener los estimadores de α , β y σ_s^2 , que se designan por $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\sigma}_s^2$, los cuales son:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (3.3)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \quad (3.4)$$

$$\hat{\sigma}_s^2 = \left(\frac{1}{n-2} \right) \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i)]^2 \quad (3.5)$$

Donde,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.6)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.7)$$

Los estimadores por mínimos cuadrados tienen la propiedad de que son insesgados y tienen varianza mínima.

En la TMP se aplica el modelo de regresión lineal i veces (una por cada acción). Es decir, hacemos la regresión de la tasa de rendimiento de la acción i en el periodo t , por lo que la ecuación (3.1) se reescribe como,

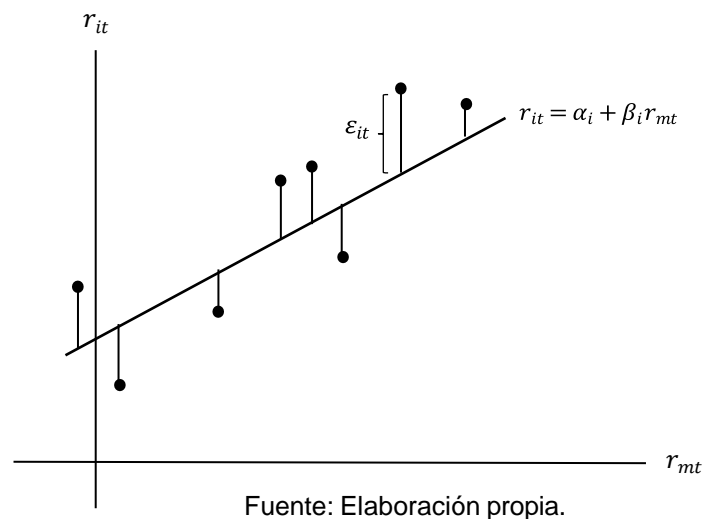
$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it} \quad (3.8)$$

Donde, α_i es el coeficiente de intersección, β_i es la pendiente; r_{it} es la tasa de rendimiento de la acción i en el periodo t , r_{mt} es la tasa de rendimiento de algún índice de mercado en el período t , y ε_{it} es el término de error residual inexplicado para el activo i en el período t .

A la ecuación (3.8) se le conoce como el **Modelo de Índice Único**¹⁸ (MIU), modelo de un factor, modelo de mercado de factor único, modelo diagonal, línea característica, modelo de mercado o función generadora de rendimiento.

La Figura 3.1 muestra un diagrama de dispersión hipotético, donde el criterio de mínimos cuadrados selecciona la ecuación (3.8) de modo que la suma de los residuos $\sum \varepsilon_{it}$ sea la menor posible.

Figura 3.1 Una forma posible de la ecuación (3.8).



El modelo de regresión de la ecuación (3.8) tiene cinco supuestos sobre el término de error aleatorio.

1. $E(\varepsilon_{it}) = 0$.
2. La $Var(\varepsilon_{it})$ denotada por $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ es constante.
3. La $Cov(\varepsilon_{it}, r_{mt}) = 0$.
4. La $Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{is}) = 0$ para $t \neq s$.
5. La $Cov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = 0$ para $i \neq j$.

¹⁸ Este modelo se basa en el supuesto de que la distribución de probabilidad conjunta entre r_{it} y r_{mt} es estacionaria y normal bivariada (Francis y Kim, 2013).

Si los datos muestrales cumplen con los supuestos anteriores, los estimadores de α_i y β_i obtenidos por mínimos cuadrados, serán insesgados y de varianza mínima.

En la TMP, la ecuación (3.8) se interpreta a partir de dos componentes, una parte sistemática y una parte no sistemática:

$$\underbrace{r_{i,t}}_{\text{Rendimiento total}} = \underbrace{\alpha_i + \beta_i r_{mt}}_{\text{Parte sistemática}} + \underbrace{\varepsilon_{it}}_{\text{Parte no sistemática}} \quad (3.8a)$$

El primer componente del rendimiento total se describe por la variable regresora r_{mt} , y el segundo componente es la parte restante del rendimiento total que r_{mt} no explica.

Aplicando la varianza en ambos lados de la ecuación (3.8), obtenemos,

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_{it}) &= \text{Var}(\alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it}) \\ &= \text{Var}(\beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it}) = \text{Var}(\beta_i r_{mt}) + \text{Var}(\varepsilon_{it}) + 2\text{Cov}(\beta_i r_{mt}, \varepsilon_{it}) \\ &= \beta_i^2 \text{Var}(r_{mt}) + \text{Var}(\varepsilon_{it}) + 2\beta_i \text{Cov}(r_{mt}, \varepsilon_{it}) \\ &= \beta_i^2 \text{Var}(r_{mt}) + \text{Var}(\varepsilon_{it}) + 2\beta_i * 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad (3.9)$$

Donde

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_{it}) &= \sigma_i^2 \\ \text{Var}(r_{mt}) &= \sigma_m^2 \end{aligned}$$

Al igual que en la ecuación (3.8a), podemos interpretar la varianza de r_{it} a través de los dos términos del lado derecho de la ecuación (3.9). Sabemos que la varianza de r_{it} mide el riesgo total de la acción i en el periodo de tiempo t . El primer término, $\beta_i^2 \sigma_m^2$, se conoce como **riesgo sistemático**, y el segundo término, $\sigma_{\varepsilon_i}^2$, como **riesgo no sistemático**.

Para describir de mejor forma estos riesgos tomamos como base los trabajos de Gitman y Joehnk (2009) y de Pascale (2009), así, construimos las siguientes definiciones:

- El **riesgo sistemático, no diversificable o de mercado** se define como la variabilidad de los activos que puede ser atribuida a un factor común; es la parte inevitable del riesgo de una inversión.

Este riesgo está vinculado al mercado en general, a las condiciones de la economía, a la inflación o a factores políticos, entre otras causas. Además, es el mínimo nivel de riesgo al que se llega con la diversificación del portafolio.

- El **riesgo no sistemático, diversificable o riesgo único** se refiere a la proporción de variabilidad de una acción que puede ser eliminada con una diversificación eficiente.

Este riesgo es el resultado de acontecimientos incontrolables o aleatorios que son específicos de la empresa, como huelgas laborales, o demandas judiciales.

- El coeficiente **beta** es una medida del riesgo sistemático que indica la influencia que tiene el portafolio de mercado en el rendimiento de una acción.

Dado que beta es la pendiente de la recta, ésta muestra en qué medida los rendimientos de un activo, cambian sistemáticamente con las variaciones en los rendimientos del mercado.

Si una acción tiene una beta de +1, la acción experimenta cambios en su tasa de rendimiento iguales a los cambios en la tasa de rendimiento de mercado. Una acción con una beta de -1, se mueve en dirección contraria al mercado; sin embargo, encontrar betas negativas es difícil ya que las acciones experimentan variaciones en su rendimiento en la misma dirección que los cambios en el mercado de valores (Pascale, 2009).

Los conceptos de riesgo sistemático y riesgo no sistemático se utilizan ampliamente en otros modelos que forman parte de la TMP, por ejemplo, en la medida del riesgo VaR o el modelo CAPM.

De la misma forma que calculamos la varianza de r_{it} (utilizando la Teoría de Probabilidad), también calculamos la covarianza entre r_{it} y r_{jt} de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Cov(r_{it}, r_{jt}) &= E [(r_{it} - E(r_{it})) (r_{jt} - E(r_{jt}))] \\ &= E\{[(\alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it}) - E(\alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it})][(\alpha_j + \beta_j r_{mt} + \varepsilon_{jt}) - E(\alpha_j + \beta_j r_{mt} + \varepsilon_{jt})]\} \\ &= E\{[\alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it} - \alpha_i - \beta_i E(r_{mt})][\alpha_j + \beta_j r_{mt} + \varepsilon_{jt} - \alpha_j - \beta_j E(r_{mt})]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E\{[\beta_i(r_{mt} - E(r_{mt})) + \varepsilon_{it}][\beta_j(r_{mt} - E(r_{mt})) + \varepsilon_{jt}]\} \\
&= E\{\beta_i\beta_j(r_{mt} - E(r_{mt}))^2 + \beta_i(r_{mt} - E(r_{mt}))\varepsilon_{jt} + \varepsilon_{it}\varepsilon_{jt} + \beta_j(r_{mt} - E(r_{mt}))\varepsilon_{it}\} \\
&= \beta_i\beta_j E[(r_{mt} - E(r_{mt}))^2] \\
Cov(r_{it}, r_{jt}) &= \beta_i\beta_j\sigma_m^2 \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Aplicación del método por mínimos cuadrados para estimar α_i , β_i y $\sigma_{\varepsilon_i}^2$

Sabemos que la técnica estadística por mínimos cuadrados supone que hay n pares de datos muestrales. De la misma forma, el MIU supone que hay un conjunto de valores muestrales en pares de la forma (r_{mt}, r_{it}) y encuentra los valores α_i y β_i que mejor se ajusten a una línea.

Usando las fórmulas (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7) para T observaciones muestrales, se obtienen las siguientes ecuaciones para estimar α_i , β_i y $\sigma_{\varepsilon_i}^2$,

$$\beta_i = \frac{\sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{mt} - \bar{r}_m)}{\sum_{t=1}^T (r_{mt} - \bar{r}_m)^2} \tag{3.11}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{r}_i - \beta \bar{r}_{i m} \tag{3.12}$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2 = \left(\frac{1}{T-2} \right) \sum_{t=1}^T [r_{it} - (\hat{\alpha} + \beta r_{i mt})]^2 \tag{3.13}$$

Donde

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it} \tag{3.14}$$

$$\bar{r}_m = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{mt} \tag{3.15}$$

Ejemplo.

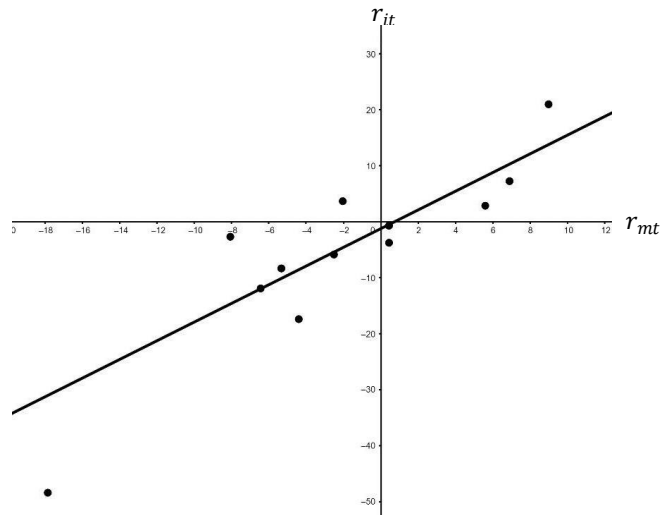
La Tabla 3.1 muestra las tasas de rendimiento mensuales de la acción ALFAA del índice S&P/IPC y los rendimientos mensuales del mismo, durante el período de enero a diciembre del año 2008.

Tabla 3.1 Rendimientos mensuales de ALFAA y del S&P/BMV IPC.

Mes	t	Rendimiento de la acción i : ALFAA r_{it} (1)	Rendimiento del mercado r_{mt} (2)	Rendimiento ajustado de la acción i $\alpha_i + \beta_i r_{mt}$ (3)	$(r_{it} - \bar{r}_i)$ $\times (r_{mt} - \bar{r}_m)$ (4)	Residuos $\hat{\xi}_{it}$ (1) - (3)
Enero	1	-5.848	-2.516	-6.350	0.246	0.500
Febrero	2	-0.690	0.434	-0.324	11.453	-0.366
Marzo	3	7.266	6.896	12.873	112.536	-5.608
Abril	4	3.690	-2.043	-5.382	-0.157	9.072
Mayo	5	2.879	5.594	10.214	62.682	-7.335
Junio	6	-2.666	-8.069	-17.686	-16.194	15.019
Julio	7	-11.908	-6.445	-14.370	28.996	2.462
Agosto	8	-17.398	-4.399	-10.195	28.612	-7.203
Septiembre	9	-8.332	-5.333	-12.099	9.873	3.768
Octubre	10	-48.414	-17.854	-37.667	681.667	-10.747
Noviembre	11	-3.745	0.437	-0.317	3.946	-3.428
Diciembre	12	21.007	8.988	17.143	290.248	3.865
Total		-64.159	-24.309	-64.159	1213.908	0.000
Promedio		-5.346	-2.025	-5.346	101.159	0.000

Fuente: Elaboración propia.

Figura 3.2 Representación gráfica del Modelo de regresión único para la acción ALFAA y del S&P/BMV IPC.



Fuente: Elaboración propia.

Los resultados de las estimaciones de los parámetros α_{ALFAA} , β_{ALFAA} y σ_s^2 son:

$$\beta_{ALFAA} = 2.042$$

$$\hat{\alpha}_{ALFAA} = r_{ALFAA} - \beta_{ALFAA} \bar{r}_{S\&P/IPC} = -1.210$$

$$\hat{\sigma}_{sALFAA}^2 = \left(\frac{1}{T-2} \right) \sum_{t=1}^T [r_{ALFAAt} - (\hat{\alpha}_{ALFAA} + \beta_{ALFAA} r_{S\&P/IPCt})]^2 = 60.782$$

El valor de $\beta_{ALFAA} = 2.042$ nos indica que, por cada movimiento de los rendimientos del mercado, los rendimientos de la empresa cambian 2.042 veces (Gitman y Joehnk, 2009).

III.1 Relación del Modelo de Índice Único con la TMP

En el Capítulo II mostramos que podemos conformar un portafolio, p , con acciones i , si conocemos los rendimientos de éstas. En el caso del MIU cuando los rendimientos de las acciones siguen este modelo, el rendimiento del portafolio conformado por esas acciones toma la misma forma, esto lo podemos verificar de la siguiente manera

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^n w_i(\alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it}) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i + \left(\sum_{i=1}^n \beta_i w_i \right) r_{mt} + \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{it} \\ &= \alpha_p + \beta_p r_{mt} + \varepsilon_{pt} \end{aligned} \quad (3.16a)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i \\ \beta_p &= \sum_{i=1}^n \beta_i w_i \\ \varepsilon_{pt} &= \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_{it} \end{aligned}$$

Sharpe (1963) propuso reescribir la ecuación (3.16) como

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^n w_i(\alpha_i + \varepsilon_{it}) + \left(\sum_{i=1}^n w_i \beta_i \right) r_{mt} \quad (3.16b)$$

Donde,

$w_i(\alpha_i + \varepsilon_{it})$ es la proporción invertida en la acción i .

$w_i(\beta_i r_{mt})$ es la proporción invertida en el índice de mercado.

Además, dividió la variable aleatoria r_{mt} en dos, del siguiente modo

$$\begin{aligned} r_{mt} &= E(r_m) + \varepsilon_{mt} \\ r_{mt} &= \alpha_{n+1} + \varepsilon_{n+1,t} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donde,

$E(r_m) = \alpha_{n+1}$ es una constante que estima la tasa de rendimiento esperado del índice de mercado. Y $\varepsilon_{mt} = \varepsilon_{n+1,t}$ es un término de error aleatorio con media cero que mide las fluctuaciones de r_{mt} alrededor de α_{n+1} .

Tomando la varianza en ambos lados de la ecuación 3.17 obtenemos que $\sigma_m^2 = \sigma_{s_{n+1}}^2$.

La relación entre los subíndices m y $n + 1$ de la igualdad, es que ahora considerará al índice del mercado como una acción.

Como lo mencionamos en el MIU, el índice de mercado se trata como una acción ($n + 1$) en un portafolio de n acciones. Sharpe define el peso de esta acción, denotado por w_{n+1} , como

$$w_{n+1} = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i \quad (3.18)$$

Además, definió a α_{n+1} , $\varepsilon_{n+1,t}$ y w_{n+1} para simplificar la ecuación (3.16b). Sustituyendo las ecuaciones (3.17) y (3.18) en la ecuación (3.16b), se obtiene

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^n w_i (\alpha_i + \varepsilon_{it}) + w_{n+1} (\alpha_{n+1} + \varepsilon_{n+1,t})$$

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^{n+1} w_i (\alpha_i + \varepsilon_{it}) \quad (3.19)$$

Tomando el valor esperado de la ecuación (3.19),

$$E(r_{pt}) = E\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i (\alpha_i + \varepsilon_{it})\right)$$

Debido a que $E(\varepsilon_{it}) = 0$, se obtiene

$$E(r_{pt}) = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i \quad (3.20)$$

La ecuación (3.20) es resultado de la simplificación bajo el MIU que hizo Sharpe.

Por otro lado, al igual que podemos calcular la varianza de r_{it} , también es posible calcular la varianza del portafolio p bajo este modelo de la siguiente manera

$$Var(r_{pt}) \equiv \alpha_{pt}^2 = Var(\alpha_p + \beta_p r_{mt} + \varepsilon_{pt})$$

$$= \text{Var}(\beta_p r_{mt} + \varepsilon_{pt}) = \text{Var}(\beta_p r_{mt}) + \text{Var}(\varepsilon_{pt}) + 2\text{Cov}(\beta_p r_{mt}, \varepsilon_{pt})$$

Debido a que $\text{Cov}(\varepsilon_{it}, r_{mt}) = 0$, entonces la $\text{Cov}(\beta_p r_{mt}, \varepsilon_{pt}) = 0$.

Entonces,

$$\begin{aligned} &= \text{Var}(\beta_p r_{mt}) + \text{Var}(\varepsilon_{pt}) \\ &= \beta_p^2 \text{Var}(r_{mt}) + \text{Var}(\varepsilon_{pt}) \end{aligned}$$

$$\sigma_{pt}^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sigma_{sp}^2 \quad (3.21)$$

Donde,

$$\text{Var}(r_{mt}) = \sigma_m^2$$

$$\text{Var}(\varepsilon_{pt}) = \sigma_{sp}^2$$

Con base en la ecuación (3.9), para la varianza total de r_{it} , el riesgo total del portafolio p también se puede dividir en dos componentes:

$$\underbrace{\sigma_{pt}^2}_{\text{Riesgo total}} = \underbrace{\beta_p^2 \sigma_m^2}_{\text{Riesgo sistemático}} + \underbrace{\sigma_{sp}^2}_{\text{Riesgo no sistemático}} \quad (3.21a)$$

La interpretación de la ecuación (3.21a) se hace de la misma forma que con la ecuación (3.9), donde el primer componente sigue siendo el riesgo sistemático o no diversificable y β_p^2 se utiliza como índice de éste, midiendo la sensibilidad del portafolio p respecto al portafolio del mercado; y el segundo componente representa al riesgo no sistemático o diversificable.

Sharpe también simplifico la ecuación (3.21), sustituyendo las ecuaciones (3.19) y (3.20), de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_{pt}) &\equiv \sigma_p^2 = E \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i (r_{it} - E(r_{pt})) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i (\alpha_i + \varepsilon_{it}) - \sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{n+1} w_i \varepsilon_{it} - \sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i \varepsilon_{it} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Sabemos que $E(\varepsilon_{it}) = 0$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i \varepsilon_{it} \right)^2 \right] - E \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i \varepsilon_{it} \right)^2 \right] \\
&= \text{Var} \left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i \varepsilon_{it} \right) \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (1.7) para la varianza del portafolio, la ecuación (3.22) es igual

a

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \sigma_{s_i}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} w_i w_j \text{Cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) \tag{3.23}$$

La ecuación (3.23) se simplifica debido a que $\text{Cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = 0$ para $i \neq j$, tomando la siguiente forma

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \sigma_{s_i}^2 \tag{3.24}$$

La ecuación (3.24) en notación matricial se ve como

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n & w_{n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{s_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{s_2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{s_n}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{s_{n+1}}^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ w_{n+1} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma_s \mathbf{w} \tag{3.25a}$$

Donde

$$\mathbf{w}^T = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n \quad w_{n+1}]$$

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_n}^2 & 0 \\ \mathbf{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\varepsilon_m}^2 \end{pmatrix}$$

Resulta más fácil obtener la inversa de la matriz diagonal en la ecuación (3.25), ya que sólo se tienen que calcular los recíprocos de cada entrada; esto evidencia que, obtenerla, es computacionalmente más sencillo para portafolios conformados por una cantidad grande de acciones mediante el MIU.

III.2 Determinación de la frontera eficiente bajo el Modelo de Índice Único

Al igual que en el modelo media-varianza, para encontrar los pesos óptimos se minimiza la varianza del portafolio, pero ahora, esta varianza está dada por la ecuación (3.24). A continuación, bajo el MIU, tenemos el siguiente problema de optimización

$$\text{Minimizar } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2 \sigma_{s_i}^2 = \mathbf{w}^T \Sigma_s \mathbf{w} \quad (3.26)$$

Sujeto a

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\alpha} = E(R_p) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{w}^T \mathbf{l} = 1 \quad (2.15)$$

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (3.28)$$

Donde,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ h w_{n+1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ h \alpha_{n+1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \\ h-1 \end{pmatrix}, \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ 1 \\ h0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{s1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{s1}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{sn}^2 & 0 \\ h0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

Recuerde que $\alpha_{n+1} = E(r_m)$ y $\sigma_{s_{n+1}}^2 = \sigma_m^2$.

Este problema está sujeto a tres restricciones, la primera está dada por la ecuación (3.27) e indica el nivel de rendimiento que se desea obtener; la ecuación (2.15) es la misma restricción presupuestaria bajo el Modelo M-V y, por último, la ecuación (3.28) es la restricción que define el peso del índice de mercado como la acción $n + 1$ en el portafolio.

Debido a que las restricciones son de igualdad utilizamos los multiplicadores de Lagrange para encontrar la solución de este problema. Con las ecuaciones (3.26), (3.27), (2.15) y (3.28) formamos la siguiente función objetivo

$$\text{Minimizar } L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}_s \mathbf{w} + \lambda_1 [E(R_p) - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\alpha}] + \lambda_2 (1 - \mathbf{w}^T \mathbf{l}) + \lambda_3 (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta}) \quad (3.29)$$

Donde λ_1 , λ_2 y λ_3 son multiplicadores de Lagrange, además α_i , β_i y $\sigma_{s_i}^2$ son valores que se obtienen con las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13) y no dependen de la solución obtenida a partir de la ecuación (3.2).

El portafolio de varianza mínima se encuentra al determinar las condiciones de primer orden, es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \boldsymbol{\Sigma}_s \mathbf{w} - \lambda_1 \boldsymbol{\alpha} - \lambda_2 \mathbf{l} - \lambda_3 \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = E(R_p) - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{w}^T \mathbf{l} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (3.33)$$

De la ecuación (3.30) obtenemos la siguiente igualdad

$$\boldsymbol{\Sigma}_s \mathbf{w} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha} + \lambda_2 \mathbf{l} + \lambda_3 \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} \boldsymbol{\alpha} + \lambda_2 \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} \mathbf{l} + \lambda_3 \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} [\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{l} \quad \boldsymbol{\beta}] (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3)^T \quad (3.30a)$$

Donde

$$[\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{l} \quad \boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & 1 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & 1 & \beta_n \\ \alpha_{n+1} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar los valores de λ_1 , λ_2 y λ_3 multiplicamos $[\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{l} \quad \boldsymbol{\beta}]^T$ por la ecuación (3.30a) y obtenemos,

$$[\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{l} \quad \boldsymbol{\beta}]^T \mathbf{w} = [\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{l} \quad \boldsymbol{\beta}]^T \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} [\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{l} \quad \boldsymbol{\beta}] (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3)^T$$

$$(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3)^T = \mathbf{G}^{-1} [\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{l} \quad \boldsymbol{\beta}]^T \mathbf{w}$$

Donde

$$\mathbf{G} = [\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{l} \quad \boldsymbol{\beta}]^T \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} [\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{l} \quad \boldsymbol{\beta}]$$

De las ecuaciones (3.31), (3.32) y (3.33) determinamos lo siguiente,

$$[\alpha \quad l \quad \beta]^T \mathbf{w} = [E(R_p) \quad 1 \quad 0]^T$$

Por lo tanto,

$$(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3)^T = \mathbf{G}^{-1} [E(R_p) \quad 1 \quad 0]^T \quad (3.34)$$

Para determinar a \mathbf{w} sustituimos la ecuación (3.34) en la ecuación (3.30a), obtenemos,

$$\mathbf{w} = \Sigma_s^{-1} [\alpha \quad l \quad \beta] \mathbf{G}^{-1} [E(R_p) \quad 1 \quad 0]^T \quad (3.35)$$

La varianza del portafolio la determinamos sustituyendo la ecuación (3.35) en la ecuación (3.25a), de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= [E(R_p) \quad 1 \quad 0] \mathbf{G}^{-1} [\alpha \quad l \quad \beta]^T \Sigma_s^{-1} \Sigma_s \Sigma_s^{-1} [\alpha \quad l \quad \beta] \mathbf{G}^{-1} [E(R_p) \quad 1 \quad 0]^T \\ &= [E(R_p) \quad 1 \quad 0] \mathbf{G}^{-1} [E(R_p) \quad 1 \quad 0]^T \\ \sigma_p^2 &= g_{11} [E(R_p)]^2 + 2g_{12} E(R_p) + g_{22} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Donde

g_{ij} es la entrada (i, j) de la matriz \mathbf{G}^{-1} .

La ecuación (3.36) es la ecuación de la frontera eficiente bajo el MIU; ésta tiene la forma de parábola en el plano $[\sigma, E(R_p)]$ e hipérbola en el plano $[\sigma^2, E(R_p)]$.

Otra forma de determinar la ecuación (3.36) es calculando la matriz de varianzas-covarianzas bajo el MIU, con esta matriz podemos seguir el proceso descrito en el capítulo II, utilizándola como si fuera la matriz de varianzas-covarianzas bajo el Modelo M-V (en el siguiente ejemplo graficamos la frontera eficiente con ambas ecuaciones).

Ejemplo. Portafolio de inversión mediante el MIU.

Considere los valores $E(R_i)$, σ_i^2 y σ_{ij} de las acciones presentadas en la Tabla 2.1, además, suponga que el rendimiento del portafolio que se desea alcanzar es $E(R_p) = 2.1\%$.

Recordamos los rendimientos, varianzas y covarianzas de las tres acciones de la Tabla 2.1, a continuación.

$$\begin{array}{rccccccc}
 E(r_1) & 2.68 & & & & & & \\
 \mathbf{E} = [E(r_2)] = (0.16) & \text{y } \mathbf{\Sigma} = & \begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array} & = & \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 \end{pmatrix} \\
 E(r_3) & 1.54 & & & & & &
 \end{array}$$

Los parámetros estimados del MIU de la ecuación (3.1) para las tres acciones son las siguientes:

$$\begin{array}{rcccccc}
 \alpha_1 & 1.94 & \beta_1 & 1.23 & \sigma_{s1}^2 & 575.84 \\
 [\alpha_2] = (-0.31), & [\beta_2] = (0.78) & \text{y } & [\sigma_{s1}^2] = (76.56) \\
 \alpha_3 & 1.16 & \beta_3 & 0.62 & \sigma_{s1}^2 & 217.41
 \end{array}$$

Además, el rendimiento promedio y varianza del portafolio de mercado son

$$E(r_m) = 0.61 \text{ y } \sigma_m^2 = 39.82$$

Construiremos el portafolio de inversión bajo los modelos M-V y de Índice Único para comparar sus resultados.

La información necesaria para calcular los pesos óptimos del portafolio utilizando la ecuación 3.36 es,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1.94 \\ -0.31 \\ 1.16 \\ 0.61 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1.23 \\ 0.78 \\ 0.62 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 575.84 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 76.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 217.41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39.82 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{G} = [\alpha \quad \mathbf{I} \quad \beta]^T \mathbf{\Sigma}_\varepsilon^{-1} [\alpha \quad \mathbf{I} \quad \beta]$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 1.94 & 1 & 1.23 \\ -0.31 & 1 & 0.78 \\ 1.16 & 1 & 0.62 \\ 0.61 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} 575.84 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 76.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 217.41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39.82 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.94 & 1 & 1.23 \\ -0.31 & 1 & 0.78 \\ 1.16 & 1 & 0.62 \\ 0.61 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0.023 & 0.005 & -0.011 \\ 0.005 & 0.019 & 0.015 \\ -0.011 & 0.015 & 0.038 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Con la ecuación 3.35 calculamos los multiplicadores de Lagrange como,

$$(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3)^T = \begin{pmatrix} 0.023 & 0.005 & -0.011 \\ 0.005 & 0.019 & 0.015 \\ -0.011 & 0.015 & 0.038 \end{pmatrix}^{-1} [2.1 \ 1 \ 0]^T = \begin{pmatrix} 102.20 \\ 5.42 \\ 27.78 \end{pmatrix}$$

Los pesos óptimos del portafolio los calculamos con la ecuación (3.36) como sigue,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= \\
 &= \begin{pmatrix} 575.84 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 76.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 217.41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39.82 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.94 & 1 & 1.23 \\ -0.31 & 1 & 0.78 \\ 1.16 & 1 & 0.62 \\ 0.61 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.023 & 0.005 & -0.011 \\ 0.005 & 0.019 & 0.015 \\ -0.011 & 0.015 & 0.038 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0.41 \\ -0.06 \\ 0.65 \\ 0.86 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La varianza bajo el MIU la calculamos utilizando la matriz de varianzas de los errores, Σ_s , como,

$$\sigma_p^2 = \begin{pmatrix} 0.41 & -0.06 & 0.65 & 0.86 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 575.84 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 76.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 217.41 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 39.82 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.41 \\ -0.06 \\ 0.65 \\ 0.86 \end{pmatrix} = 220.03$$

O,

$$\sigma_p = 14.83$$

El mismo portafolio de inversión bajo el Modelo M-V lo construimos en el primer ejemplo de la sección II.3.1. En la tabla 3.2 comparamos los resultados obtenidos.

Tabla 3.2 Modelo M-V vs. MIU.

	Modelo M-V	MIU
w_1	0.34	0.41
w_2	-0.13	-0.06
w_3	0.79	0.65
$E(R_p)$	2.10	2.10
σ_p^2	79.55	220.03

Fuente: Elaboración propia.

Los pesos óptimos calculados con el modelo M-V y el MIU son similares, en cuanto a cuál acción le asignan mayor peso y a la que le asignan un peso negativo, sin embargo, aunque con ambos modelos se alcanza un rendimiento esperado de 2.1%, el MIU estima una varianza mayor (220.03) que la estimada con el modelo M-V (79.55).

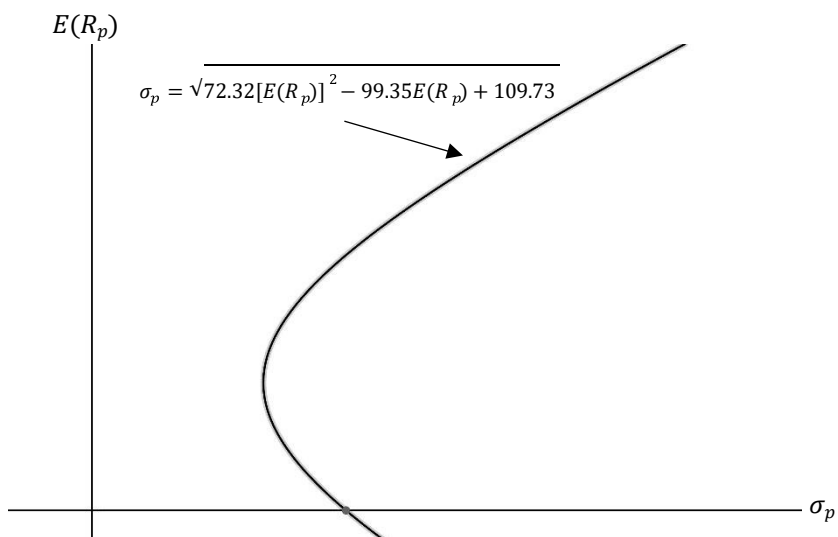
Debido a que los pesos óptimos obtenidos por el modelo M-V son la solución exacta, la varianza del portafolio con esos pesos es menor que la varianza obtenida con el MIU.

Una vez calculados los pesos óptimos, es posible encontrar la ecuación de la gráfica de la frontera eficiente. Siguiendo la ecuación 3.37, tenemos:

$$\sigma_p^2 = 72.32[E(R_p)]^2 - 99.35E(R_p) + 109.73$$

La ecuación anterior graficada en el plano $[\sigma_p, E(R_p)]$ se observa en la figura 3.3.

Figura 3.3 Frontera eficiente bajo el MIU.



Fuente: Elaboración propia.

Otra forma de calcular la ecuación de la frontera eficiente es siguiendo los mismos pasos descritos en el capítulo II para la ecuación de la frontera eficiente de n activos, pero, en este caso la matriz de varianzas-covarianzas se construye con los parámetros del MIU descritos por las ecuaciones (3.9) y (3.10).

La matriz de varianzas-covarianzas resultante es:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 635.71 & 38.20 & 30.45 \\ 38.20 & 100.93 & 19.43 \\ 30.45 & 19.43 & 232.89 \end{pmatrix}$$

Una vez calculada Σ , continuamos con los pasos descritos por el modelo M-V para encontrar la ecuación de la frontera eficiente, resulta en:

$$\sigma_p^2 = 72.32[E(R_p) - 0.68]^2 + 75.61$$

La ecuación anterior graficada en el plano $[\sigma_p, E(R_p)]$ resulta en la misma frontera eficiente de la Figura 3.3.

En el Capítulo II las estimaciones de $E(R_i)$, σ_i^2 y σ_{ij} , se hicieron a través de los estimadores muestrales sin asumir ninguna función generadora de rendimiento, otra forma de estimar estos datos es a través del MIU¹⁹.

Independientemente del enfoque utilizado, los estimadores de $E(R_i)$, σ_i^2 y σ_{ij} pueden obtenerse a partir de la estadística o de un juicio subjetivo, es decir, asignar los pesos en el portafolio con base en las creencias del analista.

Debido a que el número de parámetros a estimar aumenta exponencialmente en relación con el número de acciones, Markowitz hizo ciertas sugerencias para incrementar el uso de su modelo del análisis del portafolio. Siguiendo su sugerencia, Sharpe (1963)

¹⁹ Otro enfoque para estimar $E(R_i)$, σ_i^2 y σ_{ij} es a través de proceso de generación de rendimiento multifactor.

desarrolló un modelo simplificado de análisis media-varianza llamado MIU (Francis y Kim, 2013).

Como resultados de esta simplificación tenemos:

- Menor cantidad de parámetros a estimar, como consecuencia el problema del portafolio se puede resolver en menor tiempo.
- El problema del portafolio reformulado a través del MIU facilita el trazo de la frontera eficiente por medio de $E(r_m)$ y σ_m^2 .
- La frontera eficiente obtenida a través de esta simplificación difiere de la obtenida por medio del modelo media-varianza.

IV. Construcción de un portafolio de inversión con acciones pertenecientes al índice S&P/BMV IPC

En este capítulo ilustramos las metodologías y conceptos vistos en los capítulos anteriores. Primero, se analizan las empresas que conforman el S&P/BMV Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) en el periodo 3er trimestre de 2007 a 1er trimestre de 2011 y se eligen las acciones que conforman el portafolio de inversión; posteriormente se obtienen y analizan los estimadores de rendimiento y riesgo de cada acción; y finalmente se analiza el portafolio de inversión que consta de 12 acciones.

IV.1 Elección de la muestra

Para la conformación del portafolio se analizaron las 35 empresas que conformaron el S&P/BMV IPC del 3er trimestre de 2007 al 1er trimestre de 2011, sin embargo, solo 24 empresas tenían información disponible en el periodo de estudio.

En este periodo la BMV agrupaba a las empresas en seis sectores, por lo que agrupamos las 24 empresas dentro de estos, los cuales son: industrial, productos de consumo básico, materiales, productos de consumo no básico, telecomunicaciones y servicios financieros.

En la tabla 4.1 se muestra la clasificación de las empresas por sectores.

Tabla 4. 1 Empresas que conformaron el S&P/BMV IPC de julio 2007 a marzo 2011 agrupados por sectores.

Industrial	Consumo básico	Materiales	Consumo no básico	Telecomunicaciones	Servicios Financieros
ALFA	FEMSA	CEMEX	ALSEA	AMXL	BBVA
ARA	GRUMA	GMÉXICO	ELEKTRA	AXTEL	GFNORTE
ASUR	KIMBER	PEÑOLES		TELEVISA	CITIGROUP
GAP	SORIANA				
HOMEX	BIMBO				
ICA	AC				
URBI					

Fuente: Elaboración propia con información de (Rodríguez García et al., 2015).

Gitman y Joehnk (2009) sugieren que invertir en diferentes industrias es una alternativa para disminuir el riesgo del portafolio, por lo que, con el fin de construir un

portafolio de inversión diversificado se eligieron dos empresas por sector (debido a que en el sector de consumo no básico solo dos empresas tenían información disponible); en los sectores con más de dos empresas se eligieron aquellas que tenían rendimientos positivos.

Siguiendo el criterio anterior, el portafolio de inversión se conforma por las acciones de las siguientes empresas:

- Alfa, S.A.B. de C.V. (ALFAA)
- Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V. (ASURB)
- Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V. (FEMSA)
- Arca Continental, S.A.B. de C.V. (AC)
- Grupo México, S.A.B. de C.V. (GMEXICOB)
- Industrias Peñoles, S.A.B. de C.V. (PE&OLES)
- Alsea, S.A.B. de C.V. (ALSEA)
- Grupo Elektra S.A.B. de C.V. (ELEKTRA)
- América Móvil S.A.B. de C.V. (AMXL)
- Grupo Televisa S.A.B. (TLEVISA)
- Banco Bilbao Vizcaya Argentaria, S.A. (BBVA)
- Grupo Financiero Banorte S.A.B. de C.V. (GFNORTEO)

En el Anexo B.2 se presenta una descripción general de cada empresa.

IV.2 Análisis de datos

Para cada acción se estimó el riesgo y rendimiento. Primero, con sus respectivos precios de cierre, se calcularon los rendimientos mensuales usando la fórmula del rendimiento simple.

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} * 100$$

Donde, $r_{i,t}$ es el rendimiento de la acción i en el mes t , y $P_{i,t-1}$ y $P_{i,t}$ son los precios de la acción i en el mes $t - 1$ y t , respectivamente.

Posteriormente, utilizando los rendimientos simples mensuales se estimó el rendimiento esperado de cada acción, así como las varianzas y covarianzas.

La estimación del rendimiento esperado de cada acción se calcula como

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t}$$

Donde T es el número total de observaciones históricas, en este caso $T = 45$.

Por otra parte, la estimación de la varianza de los rendimientos de cada acción se calcula como

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \bar{r}_i)^2$$

Como se mencionó en el capítulo I, la varianza muestral mide la dispersión de la tasa de rendimiento de cada activo alrededor de la media muestral, o promedio.

Las estimaciones de la covarianza y coeficiente de correlación entre los rendimientos de cada par de acciones se calculan como sigue:

$$\hat{\alpha}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j)$$

Y

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{\alpha}_{ij}}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j}$$

A continuación, se muestra el vector de rendimientos promedio, la matriz de varianzas-covarianzas y la matriz de correlaciones construidos con los estimadores mencionados.

Tabla 4. 2 Rendimiento promedio mensual de cada acción.

Acción	Rendimiento promedio
ALFAA	2.44%
ASURB	1.07%
FEMSA	1.44%
AC	1.54%
GMEXICOB	2.68%
PE&OLES	3.89%
ALSEA	-0.26%

ELEKTRA	3.61%
AMXL	0.16%
TLEVISA	0.15%
BBVA	-0.74%
GFNORTEO	1.02%

Fuente: Elaboración propia con información obtenida de Investing.com.

Tabla 4. 3 Matriz de varianza-covarianza de los rendimientos mensuales de las acciones.

Acción	ALFAA	ASURB	FEMSA	AC	GMEXICO	PE&OLES	ALSEA	ELEKTRA	AMXL	TLEVISA	BBVA	GFNORTE
ALFAA	211.83	81.30	69.48	43.23	82.04	108.73	102.56	75.94	63.56	41.92	100.51	138.67
ASURB	81.30	128.41	31.86	7.89	50.23	90.49	31.28	49.62	26.70	21.20	70.54	59.47
FEMSA	69.48	31.86	65.49	28.05	33.88	33.49	41.11	60.15	32.25	21.84	47.08	42.20
AC	43.23	7.89	28.05	64.90	44.73	13.59	47.23	19.25	24.37	19.95	31.30	31.33
GMEXICO	82.04	50.23	33.88	44.73	190.74	111.06	72.83	32.15	26.27	29.87	56.61	96.43
PE&OLES	108.73	90.49	33.49	13.59	111.06	238.20	50.71	79.30	29.03	21.31	64.04	113.69
ALSEA	102.56	31.28	41.11	47.23	72.83	50.71	128.20	47.75	45.71	32.59	65.22	96.96
ELEKTRA	75.94	49.62	60.15	19.25	32.15	79.30	47.75	281.53	24.64	22.35	80.53	72.00
AMXL	63.56	26.70	32.25	24.37	26.27	29.03	45.71	24.64	41.77	21.83	44.80	44.37
TLVISA	41.92	21.20	21.84	19.95	29.87	21.31	32.59	22.35	21.83	40.93	27.66	41.07
BBVA	100.51	70.54	47.08	31.30	56.61	64.04	65.22	80.53	44.80	27.66	165.50	67.79
GRNORTE	138.67	59.47	42.20	31.33	96.43	113.69	96.96	72.00	44.37	41.07	67.79	156.31

Fuente: Elaboración propia con información obtenida de Investing.com.

Tabla 4. 4 Coeficientes de correlación de los rendimientos mensuales de las acciones.

Acción	ALFAA	ASURB	FEMSA	AC	GMEXICO	PE&OLES	ALSEA	ELEKTRA	AMXL	TLEVISA	BBVA	GFNORTE
ALFAA	1.00											
ASURB	0.49	1.00										
FEMSA	0.59	0.35	1.00									
AC	0.37	0.09	0.43	1.00								
GMEXICO	0.41	0.32	0.30	0.40	1.00							
PE&OLES	0.48	0.52	0.27	0.11	0.52	1.00						
ALSEA	0.62	0.24	0.45	0.52	0.47	0.29	1.00					
ELEKTRA	0.31	0.26	0.44	0.14	0.14	0.31	0.25	1.00				
AMXL	0.68	0.36	0.62	0.47	0.29	0.29	0.62	0.23	1.00			
TLVISA	0.45	0.29	0.42	0.39	0.34	0.22	0.45	0.21	0.53	1.00		
BBVA	0.54	0.48	0.45	0.30	0.32	0.32	0.45	0.37	0.54	0.34	1.00	
GRNORTE	0.76	0.42	0.42	0.31	0.56	0.59	0.68	0.34	0.55	0.51	0.42	1.00

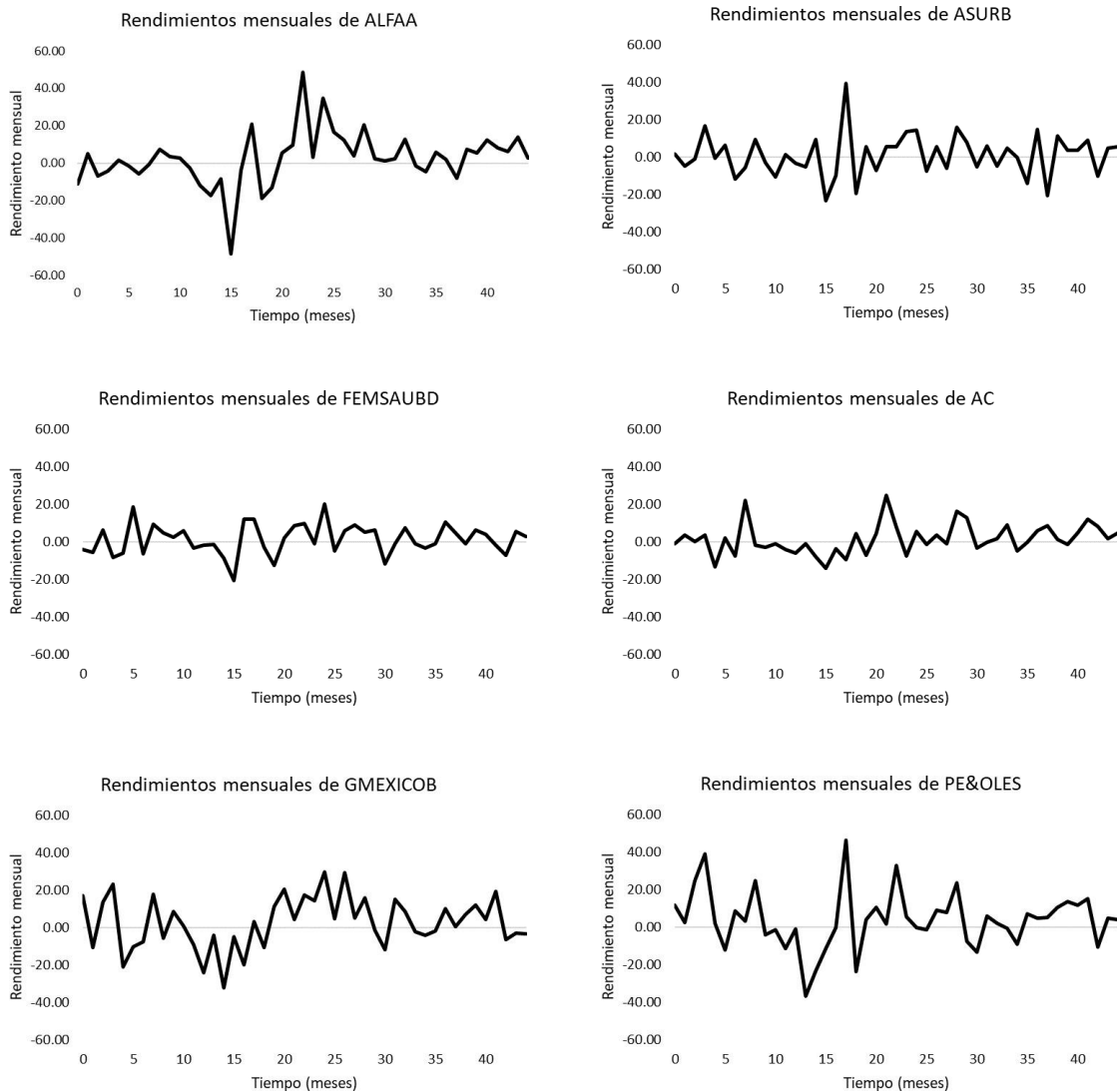
Fuente: Elaboración propia con información obtenida de Investing.com.

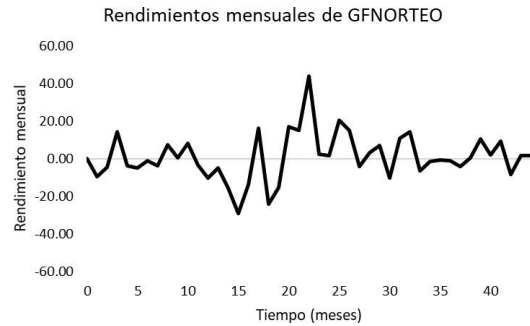
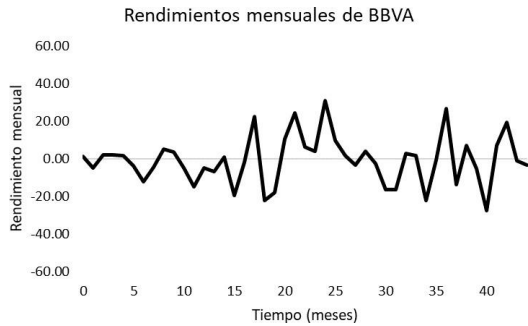
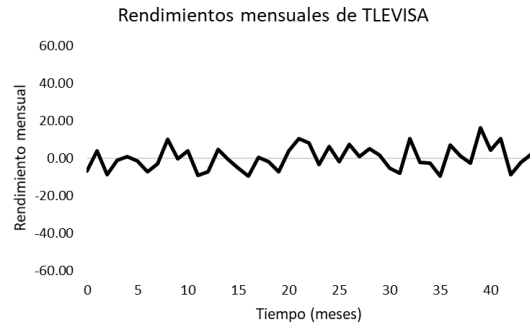
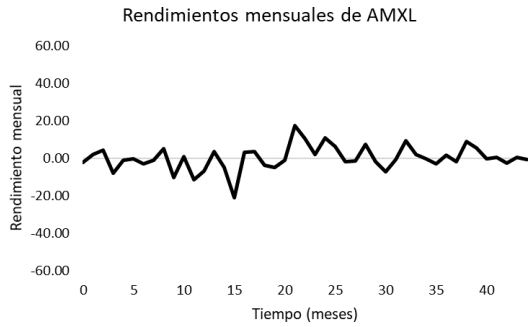
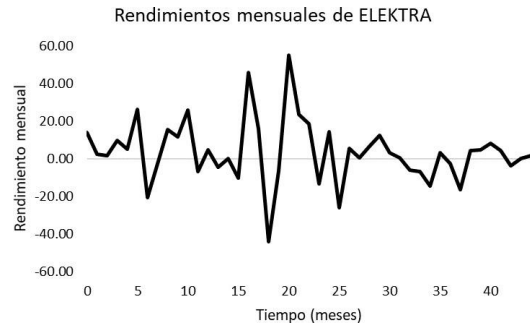
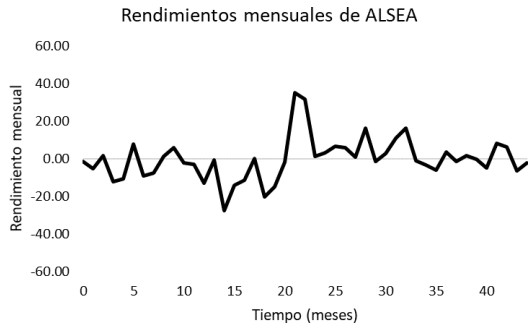
Como se puede notar en la tabla 4.2 la acción de Industrias Peñoles es la que da un mayor rendimiento esperado, por lo que en principio da pauta a que el mayor porcentaje

de inversión este destinado a esta acción, mientras que se espera que se invierta menos capital en las acciones de ALSEA y BBVA puesto que tienen rendimiento promedio negativo.

Sin embargo, sabemos por el Capítulo II que no basta con considerar únicamente el rendimiento de cada acción, es importante considerar también la volatilidad de los rendimientos y la correlación entre estos.

Figura 4. 1 Rendimientos mensuales de cada una de las acciones.





Fuente: Elaboración propia con información histórica de acciones del S&P/BMV IPC obtenida de Investing.com.

Las gráficas de la figura 4.1 indican que hay una mayor variabilidad de los rendimientos de las acciones de ALFAA, GMEXICO, PE&OLES, ELEKTRA, BBVA y GFNORTEO, mientras que, de ASURB y ALSEA en menor magnitud.

Los cambios más drásticos se observan en los meses intermedios del periodo analizado, este comportamiento refleja la posibilidad de que las empresas estén en un período de gran volatilidad debido a la crisis de 2008. Finalmente, los rendimientos de las acciones FEMSA, AC, AMXL y TLEVISA tienen poca variabilidad, aunque en algunos meses se observan cambios relativamente importantes.

Por otra parte, al examinar las estimaciones de las varianzas y covarianzas de los rendimientos, observamos que la acción cuyo rendimiento presenta menor volatilidad es la de TLEVISA, seguida de las acciones de AMXL, AC y FEMSA, en ese orden.

Por las magnitudes en las varianzas de cada acción, a TLEVISA y AMXL se les debe dar mayor peso en comparación con el resto de acciones debido a que se busca construir un portafolio con una menor volatilidad y un mayor rendimiento esperado; los resultados finales obtenidos al aplicar el modelo de Markowitz confirman dicha observación.

La diversificación de Markowitz implica combinar activos con una correlación positiva menos que perfecta para reducir el riesgo del portafolio. En la matriz de correlaciones de la tabla 4.3 podemos observar que todas las correlaciones son positivas, por lo que con dichas acciones es posible obtener una diversificación significativa del portafolio.

IV.3 Construcción del portafolio de inversión mediante el modelo media-varianza de Markowitz

Con el vector de rendimientos esperados y la matriz de varianzas-covarianzas mostrados en las tablas 4.1 y 4.2 se implementó el modelo de Markowitz desarrollado en el capítulo II y planteado en las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15).

El problema de optimización de portafolios consiste en minimizar la varianza del portafolio de inversión dado un rendimiento esperado. El rendimiento esperado, $E(R_p)$, debe estar entre el mínimo y el máximo de los rendimientos esperados mostrados en la tabla 4.1.

Se propone que sea $E(R_p) = 1.42\%$, ya que 1.42% sería el rendimiento esperado del portafolio si se invierte $1/12$ en cada acción. Además, se asume que, en México durante el periodo de estudio, se permiten las ventas en corto²⁰.

La solución del problema del portafolio se encontró utilizando álgebra matricial, siguiendo los pasos descritos en el capítulo II.2.

²⁰ En México, durante el periodo de estudio del portafolio de inversión (julio de 2007 a marzo de 2011) las operaciones de venta en corto podían realizarse sobre acciones, certificados de participación ordinarios sobre acciones y certificados de aportación patrimonial, que corresponden a las categorías de alta y media bursatilidad (DOF, 1996).

Los pesos del portafolio óptimo mostrados en la tabla 4.5 los obtuvimos con la ecuación (2.24); dichas ponderaciones representan el porcentaje a invertir en cada acción respecto al total de su presupuesto.

Tabla 4. 5 Vector de pesos óptimo de Markowitz para el portafolio de acciones construido.

Acción	w_i
ALFAA	-0.096
ASURB	0.097
FEMSA	0.117
AC	0.292
GMEXICOB	0.039
PE&OLES	0.104
ALSEA	-0.120
ELEKTRA	0.072
AMXL	0.401
TLEVISA	0.299
BBVA	-0.129
GFNORTEO	-0.077

Fuente: Elaboración propia con información obtenida de Investing.com.

Los pesos dados en la Tabla 4.5 cumplen con la restricción de que la suma de los pesos sea igual a 1, además podemos observar que hay pesos negativos; esto significa que es necesario pedir prestado capital para lograr tener una menor volatilidad con el rendimiento esperado dado. Para las acciones ALFAA, ALSEA, BBVA y GFNORTEO se realiza una venta en corto por el 9.60%, 12.00%, 12.9% y 7.70%, respectivamente.

Las acciones que tienen los pesos más altos pertenecen a las empresas América Móvil y Grupo Televisa con 40.10% y 29.90%; más de la mitad del capital se invierte en estos dos activos, lo cual es razonable porque tienen una volatilidad mínima en comparación al resto de los activos.

Posteriormente, para medir el riesgo calculamos la varianza del portafolio utilizando la ecuación (2.27), así como la volatilidad.

En la tabla 4.6 se presenta el rendimiento esperado, varianza y volatilidad de los portafolios, obteniendo: [1] Portafolio de varianza mínima (PVM) y [2] Portafolio óptimo (PO). Recordemos que el primero es llamado así ya que en la frontera eficiente no se encuentra ningún portafolio con varianza menor a 23.09, y el segundo, es el portafolio que mejor satisface las necesidades del inversionista.

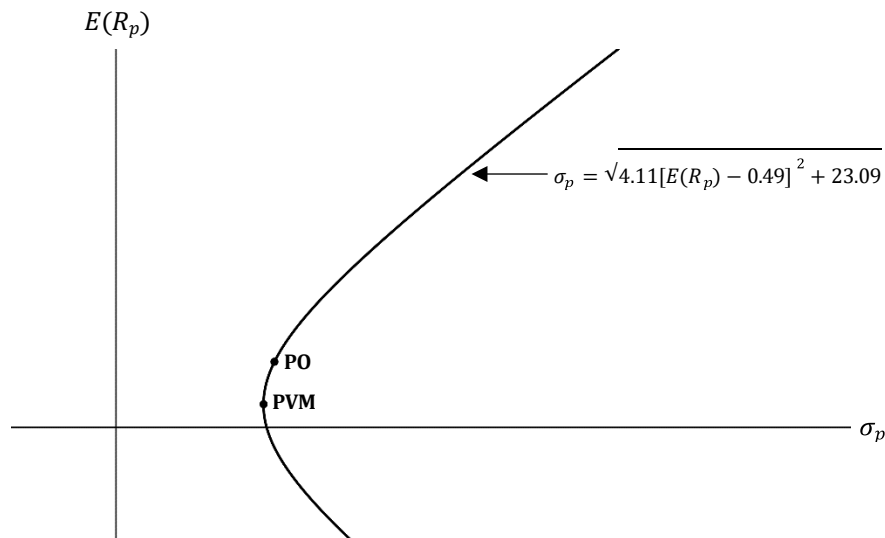
Tabla 4. 6 Resultados del PVM y del portafolio óptimo dado un rendimiento esperado de 1.42%.

Portafolio	$E(R_p)$	σ_p^2	σ_p
PVM	0.50	23.09	4.81
Portafolio óptimo (PO)	1.42	26.59	5.16

Fuente: Elaboración propia con información obtenida de Investing.com.

En la figura 4.2 podemos observar la frontera eficiente la cual fue trazada usando la ecuación (2.59) del capítulo II. Esta frontera eficiente contiene todos los portafolios a los que el inversionista podría acceder según la combinación de riesgo y rendimiento que mejor satisfaga sus necesidades.

Figura 4. 2 Frontera eficiente del portafolio de inversión bajo el Modelo M-V.



Fuente: Elaboración propia con información obtenida de Investing.com.

A partir del PVM hacia arriba, todos los portafolios son eficientes, es decir, ofrecen al inversionista el menor riesgo dado un nivel de rendimiento; hacia abajo, todos son portafolios ineficientes ya que como podemos observar en la figura 4.2, el rendimiento de los portafolios es menor al rendimiento del PVM, y además tienen una mayor desviación estándar. Incluso, si continuamos la frontera eficiente por debajo del eje horizontal, nos encontraríamos con portafolios de rendimiento negativo, lo que se traduciría en pérdidas para el inversionista.

IV.3 Construcción del portafolio de inversión mediante el Modelo de Índice Único

En este apartado construiremos el portafolio de inversión bajo el MIU.

Para construir el portafolio de inversión son necesarios los rendimientos esperados de cada acción, así como los coeficientes α , β y las varianzas de los errores, σ_s^2 ; además del rendimiento esperado y la varianza del mercado, para obtener estas dos medidas utilizamos la información histórica del S&P/BMV IPC.

El S&P/BMV IPC es el promedio ponderado de los precios de las principales acciones que se negocian en el mercado, por lo que es reflejo del mismo en su conjunto. Es el principal indicador del comportamiento del mercado en general, ya que permite medir los avances o retrocesos que, en promedio, sufren las acciones de la BMV.

De acuerdo a lo expuesto en el capítulo III, para obtener los pesos óptimos del portafolio bajo el MIU, es necesario obtener las α , β y σ_s^2 . Para calcularlas ocupamos las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.14), el procedimiento que seguimos es el mismo que para los datos de la tabla 3.1. A continuación, presentamos la tabla 4.7 con los resultados obtenidos para cada acción, así como para el indicador del mercado.

Tabla 4.7 Parámetros del MIU de las 12 acciones que conforman el portafolio.

Acción i	Coficiente beta β_i	Coficiente alfa α_i	Varianza de los errores $\hat{\sigma}_s^2$	Rendimiento esperado $E(R_i)$
ALFAA	1.839	1.324	339.630	2.442
ASURB	0.982	0.478	396.194	1.074
FEMSA	0.845	0.922	162.934	1.436
AC	0.624	1.161	217.407	1.540
GMEXICOB	1.226	1.940	575.841	2.685
PE&OLES	1.432	3.024	688.969	3.894
ALSEA	1.154	-0.961	330.769	-0.260
ELEKTRA	1.433	2.744	879.190	3.614
AMXL	0.782	-0.313	76.557	0.162
TLEVISA	0.620	-0.223	112.633	0.154
BBVA	1.233	-1.487	461.773	-0.738
GFNORTEO	1.639	0.019	217.026	1.015

Fuente: Elaboración propia.

El rendimiento del mercado y la varianza son:

$$E(r_m) = 0.6077$$

$$\sigma_m^2 = 39.8174$$

Además, al igual que en el portafolio construido bajo el Modelo M-V, el rendimiento esperado deseado del portafolio es $E(R_p) = 1.42\%$, esto para poder comparar los resultados de ambos modelos.

Recordemos que la principal ventaja del MIU es que, en lugar de utilizar la matriz de varianzas y covarianzas, utilizamos una matriz diagonal conformada por la varianza de los errores y la varianza del mercado; será con esta matriz que calculemos el riesgo del portafolio.

El vector de pesos óptimos lo calculamos con la ecuación (3.31a), y mostramos los resultados en la Tabla 4.8.

Tabla 4.8 Vector de pesos óptimos de las acciones que conforman un portafolio eficiente bajo el MIU.

Acción	w_i
ALFAA	0.036
ASURB	0.055
FEMSA	0.196
AC	0.189
GMEXICOB	0.064
PE&OLES	0.069
ALSEA	-0.011
ELEKTRA	0.050
AMXL	0.202
TLEVISA	0.186
BBVA	-0.029
GFNORTEO	-0.008

Fuente: Elaboración propia.

Los pesos de la tabla 4.8 cumplen con la restricción presupuestaria, es decir, la suma de las ponderaciones es igual a 1, y al igual que en el Modelo M-V, es necesario realizar una venta en corto para las acciones de ALSEA, BBVA y GFNORTEO por el 1.1%, 2.9% y 0.8%, respectivamente.

A pesar de que se realizan ventas en corto en las mismas acciones que el Modelo M-V (excepto por ALFAA), los porcentajes del MIU son menores, lo que significa que concentra mayor capital en el resto de acciones.

En el portafolio bajo el Modelo M-V vimos que se asignaba un mayor capital a América Móvil, con un 40.10%. En el MIU, esta acción sigue siendo la de mayor ponderación respecto al resto de acciones, sin embargo, solo se le asigna un 20.20%, es decir, la mitad del capital que le fue asignado en el modelo M-V.

Ahora calculamos la varianza del rendimiento del portafolio con la ecuación (3.26a), obteniendo

$$\sigma_p^2 = 60.85$$

o,

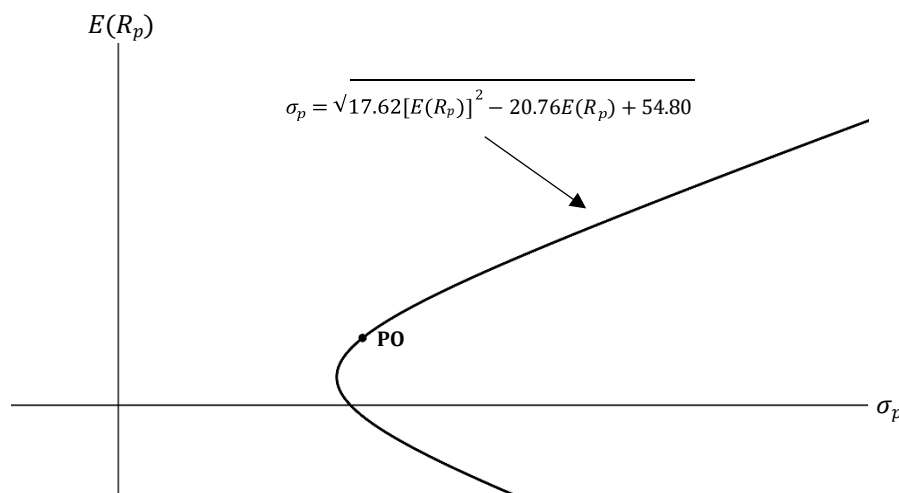
$$\sigma_p = 7.80$$

Entonces, bajo el modelo MIU, si se quiere alcanzar un rendimiento esperado del portafolio del 1.42% se debe asumir un riesgo de 60.85. Este riesgo asumido es mucho mayor al que se debe asumir en el Modelo M-V fijando el mismo valor de rendimiento esperado, el cual es 26.59.

Por lo que, a pesar de que en el MIU se estima un menor número de parámetros, el riesgo que el inversionista debería asumir es considerablemente mayor; incluso es mayor al riesgo del mercado en el periodo de estudio.

La frontera eficiente bajo el MIU se muestra en la figura 4.3.

Figura 4.3 Frontera eficiente del portafolio de inversión bajo el MIU.



Fuente: Elaboración propia con datos de Investing.com.

Como podemos observar, las fronteras eficientes en las figuras 4.2 y 4.3 son similares, sin embargo, la frontera eficiente bajo el MIU está más alejada del eje del rendimiento esperado, es decir, los portafolios eficientes sobre esta frontera representan un riesgo mayor a los portafolios eficientes de la figura 4.2.

V. Comportamiento del riesgo del portafolio durante una crisis financiera

En este capítulo analizamos el desempeño del portafolio de inversión bajo los modelos media-varianza y de Índice Único, durante la crisis financiera de 2008.

Para lograr este objetivo es necesario tener claro el concepto de crisis financiera, sin embargo, antes de esto, estudiaremos el concepto de ciclo económico ya que de éste proviene el término crisis. Una vez definidos, podremos hacer el vínculo entre ambos conceptos.

Posteriormente, para explicar el aumento del riesgo durante la crisis financiera de 2008 haremos uso de la correlación promedio como un indicador del aumento de la correlación entre las acciones; para esto, dividiremos el portafolio construido en el Capítulo IV en tres periodos motivado por las fases de los ciclos económicos.

V.1 Ciclos económicos

En la Teoría Macroeconómica existen diversas definiciones de ciclos económicos, a continuación, mencionamos algunas:

- Samuelson y Nordhaus (2010) definen a los ciclos económicos como:

Las fluctuaciones del producto, del ingreso y del empleo nacionales en toda la economía, que por lo general duran de 2 a 10 años, marcadas con una extensa expansión o contracción en la mayoría de los sectores económicos.

- Burns y Mitchel (1946) definen a los ciclos económicos como:

Un tipo de fluctuación que se encuentra en la actividad económica agregada de las naciones que organizan su trabajo principalmente en empresas comerciales: un ciclo consiste en expansiones que ocurren aproximadamente al mismo tiempo en muchas actividades económicas, seguidas de recesiones, contracciones y recuperaciones igualmente generales, que se fusionan en la fase de expansión del siguiente ciclo; esta secuencia de cambios es recurrente pero no periódica; la duración de los ciclos varía desde más de un año hasta 10 o 12 años.

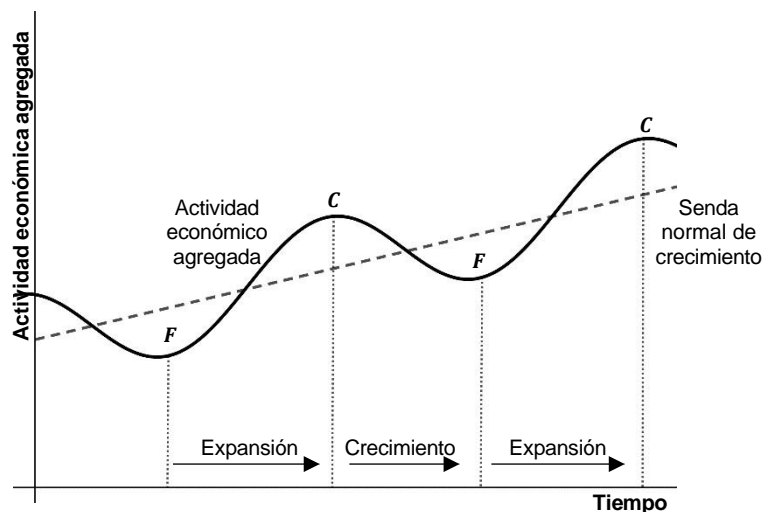
En las definiciones anteriores podemos notar que en esencia contienen los mismos elementos como son: fluctuación, expansión, contracción y duración. En este trabajo

utilizamos la definición de Burns y Mitchel (1946) para estudiar el concepto de ciclos económicos y sus elementos.

Los elementos mencionados son descritos por Abel y Bernanke (2004) de la siguiente manera:

1. Fluctuaciones. Los ciclos económicos son, en términos generales, fluctuaciones de la actividad económica agregada, no fluctuaciones de una única variable económica como el PIB.
2. Expansiones y contracciones. El periodo durante el cual la actividad económica agregada disminuye se denomina **contracción** o **recesión**. Si la recesión es especialmente grave, se convierte en una **depresión**. El periodo durante el cual crece es una **expansión**.
3. Duración. Un ciclo económico completo puede durar alrededor de un año hasta más de una década. Sin embargo, una vez que comienza una recesión (expansión), la economía tiende a continuar contrayéndose (expandiéndose) durante un periodo de tiempo, quizá durante un año o más. Y es el periodo transcurrido entre C y F (recesión) y F y C (expansión).

Figura 5.1 Ciclo económico



Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 5.1 los puntos de inflexión F y C se conocen como **fondo** y **cima**, respectivamente. Y son los puntos donde la actividad económica agregada comienza a aumentar (disminuir).

La fase más baja de actividad de un ciclo económico se define como **crisis** y representa la reducción en la tasa de crecimiento de la producción de una economía; la medición de esta actividad la realiza el Producto Interno Bruto (PIB) (Ruiz Ramírez, 2019).

Por lo anterior, el término crisis es utilizado para describir el periodo contractivo entre un punto máximo de actividad económica y la restauración de ese nivel; comprende dos fases: la recesión, en la que las tasas de crecimiento del PIB son negativas, y la recuperación; en la que dichas tasas se vuelven positivas (Mariña Flores, 2011).

En el periodo de recesión se presenta un decrecimiento de la actividad económica; disminuye el consumo, inversión y producción, lo que provoca un aumento en el desempleo. En la recuperación, la economía está estancada o crece ligeramente (Valles, 2019).

V.1.1 Crisis financiera

Mishkin (1992) define a una crisis financiera de la siguiente manera:

Una **crisis financiera** es una perturbación de los mercados financieros en la que los problemas de selección adversa²¹ y riesgo moral²² empeoran, de modo que la participación del mercado financiero no puede canalizar fondos de manera eficiente a aquellos que tienen las oportunidades de inversión más productivas.

En el caso de la inversión en bolsa, una crisis financiera se traduce como un aumento en la dificultad para saber si la empresa en la que inviertes tiene la capacidad de pagar los dividendos de la acción adquirida o si esta inversión generará rendimientos positivos. Por esta razón los inversionistas no pueden canalizar su dinero a entidades más seguras.

²¹ La selección adversa hace referencia a que, en los mercados financieros, los prestamistas frecuentemente obtienen conocimiento incompleto o limitado de la solvencia o calidad crediticia de los prestatarios (Sánchez Daza, 2001).

²² Riesgo moral se define como resultado de un problema de asimetría en la información (Sánchez Daza, 2001).

Por lo anterior el vínculo entre los mercados financieros y el ciclo económico está presente en la experiencia de una crisis financiera. Refleja la noción de crisis financiera como catalizador o causa inicial de una recesión severa y prolongada del ciclo económico (Danthine y Donaldson, 2005).

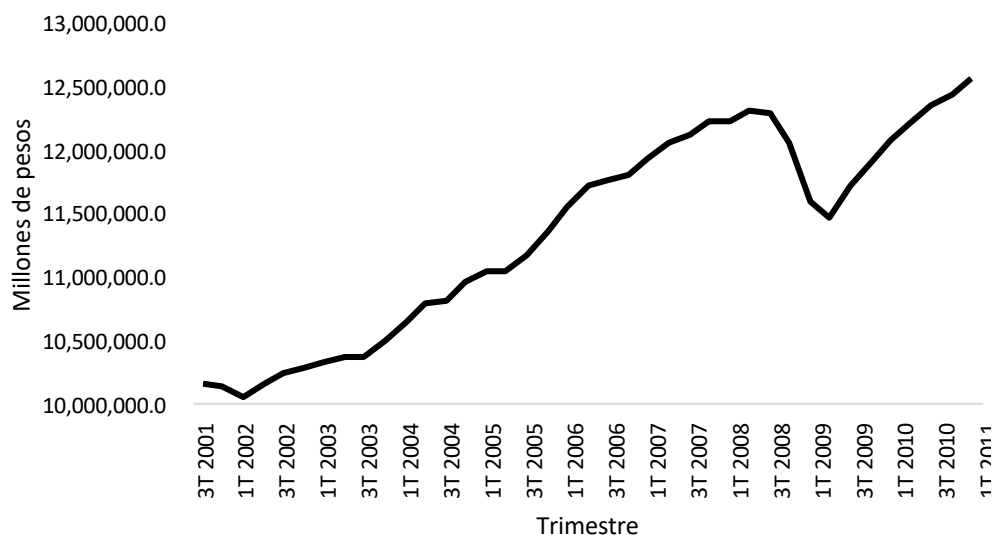
V.2 Portafolio de inversión y la crisis financiera de 2008

En México, el PIB da a conocerse en periodos trimestrales o anuales. La Figura 5.2 muestra la evolución del PIB real de México para el periodo de 3T de 2001 al 1T de 2011. En ella podemos observar una fase del ciclo económico del 1T de 2002 al 2T de 2009 la cual comprende la crisis financiera de 2008, causa inicial de una recesión severa en el ciclo económico.

La crisis financiera de 2008 tuvo consecuencias negativas a nivel mundial, y México no fue a excepción. La crisis provocó que México se encontrará en un escenario de alta incertidumbre y volatilidad, lo que ocasionó la contracción de la economía y la depreciación del peso (Luz Juárez et al., 2015).

Esta crisis fue, por su profundidad y duración, la más severa que ha experimentado el país desde la Gran Depresión, esta severidad se debió a la ausencia de una política económica anticíclica integral (Mariña Flores, 2011).

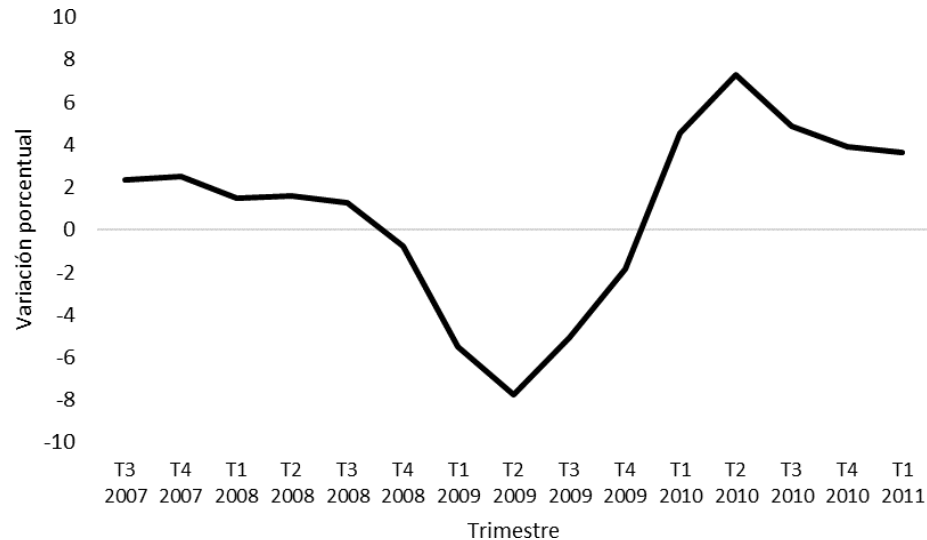
Figura 5.2 Producto Interno Bruto real trimestral.



Fuente: Elaboración propia con información de la serie histórica del PIB trimestral, serie desestacionalizada.

Para analizar la crisis financiera de 2008 analizamos las tasas de crecimiento anualizadas del PIB para el periodo del 3T de 2005 al 1T de 2011.

Figura 5.3 Producto Interno Bruto trimestral.



Fuente: Elaboración propia con información de la serie histórica del PIB trimestral, variación porcentual respecto al mismo trimestre del año anterior, serie desestacionalizada.

Como se observa en la figura 5.3, el PIB a tasas anualizadas comienza a caer durante el 4to trimestre de 2008, presentando tasas de crecimiento negativas hasta el 4to trimestre de 2009, por lo que éste será considerado como el periodo de Crisis.

A partir del 1er trimestre de 2010 se distingue un aumento del PIB, con tasas positivas, así, desde este trimestre hasta el 1er trimestre de 2011 comprende nuestro periodo Postcrisis.

Para el periodo que denominaremos como Precrisis elegimos uno de la misma duración, es decir, 3er trimestre de 2007 a 3er trimestre de 2008.

En resumen, el periodo de estudio del portafolio de inversión construido en el capítulo IV (3er trimestre de 2007 a 1er trimestre de 2011) se divide en tres periodos, Precrisis, Crisis y Postcrisis.

- Precrisis 3er trimestre de 2007 a 3er trimestre de 2008
- Crisis 4to trimestre de 2008 a 4to trimestre de 2009
- Postcrisis 1er trimestre de 2010 a 1er trimestre de 2011

Debido a que el objeto de estudio de este capítulo es explicar el comportamiento del riesgo durante una crisis retomamos la idea que Markowitz (1959) presentó en su trabajo *Portfolio Selection. Efficient diversification of investments* donde menciona que la correlación promedio puede no ser representativa para todos los activos o todas las circunstancias, pero al menos nos da una idea de la magnitud de las correlaciones entre los rendimientos de los activos.

Por lo que, para explicar el aumento o disminución del riesgo se calculan las correlaciones promedio para cada periodo; además, se analizan los cambios en la volatilidad, dado que los aumentos en la volatilidad suelen estar naturalmente relacionados con aumentos en las correlaciones (Geczy, 2014).

Para cada periodo se muestra el comportamiento del portafolio mediante los resultados de riesgo, volatilidad y correlación promedio.

Portafolio en el periodo de Precrisis

Tabla 5. 1 Resultados del portafolio de inversión en el periodo de Precrisis.

Periodo	Riesgo	Volatilidad	Correlación Promedio
Precrisis	24.65	4.97	0.183

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 5.1 podemos observar los resultados del portafolio en el periodo de Precrisis, 3er trimestre de 2007 a 3er trimestre de 2008, el portafolio de inversión tiene una correlación promedio de 0.183 y volatilidad de 4.97. Como podemos observar en la matriz de correlación (Tabla 5.2), la mayoría de las empresas tienen una correlación menor a 0.50, incluso observamos correlaciones negativas entre algunas de ellas; por lo que se deduce que cuando estos activos integran un portafolio de inversión, la reducción del riesgo es importante.

Tabla 5. 2 Coeficientes de correlación de los rendimientos mensuales de las acciones en el periodo de Precrisis.

Acción	ALFAA	ASURB	FEMSA	AC	GMEXICO	PE&OLES	ALSEA	ELEXTRA	AMXL	TLEVISA	BBVA	GFNORTE
ALFAA	1.00											
ASURB	0.03	1.00										
FEMSA	0.26	-0.09	1.00									
AC	0.14	-0.03	0.48	1.00								
GMEXICO	0.05	0.05	0.23	0.62	1.00							
PE&OLES	0.35	0.31	-0.05	0.17	0.56	1.00						
ALSEA	0.27	-0.18	0.67	0.22	0.45	0.07	1.00					
ELEKTRA	0.36	0.32	0.52	0.09	0.15	0.15	0.41	1.00				
AMXL	0.07	-0.18	0.36	0.18	0.04	0.07	0.27	0.17	1.00			
TLVISA	0.46	0.13	0.11	0.06	-0.13	-0.09	0.12	0.41	0.49	1.00		
BBVA	0.24	0.52	0.06	-0.02	0.22	0.42	0.04	0.53	0.23	0.38	1.00	
GRNORTE	0.34	0.22	0.09	0.16	0.64	0.62	0.34	0.37	0.00	0.28	0.23	1.00

Fuente: Elaboración propia.

Portafolio en el periodo de Crisis

Tabla 5. 3 Resultados del portafolio de inversión en el periodo de Crisis.

Periodo	Riesgo	Volatilidad	Correlación Promedio
Crisis	31.38	5.60	0.391

Fuente: Elaboración propia.

La correlación promedio en este periodo (4to trimestre de 2008 a 4to trimestre de 2009) incremento significativamente respecto al periodo anterior, paso de 0.18 a 0.39, i.e. aumento poco más del doble.

En Tabla 5.4, se observa que la mayoría de las empresas tienen una correlación mayor a 0.50, incluso solo se observa una correlación negativa entre dos empresas; por lo que se deduce que cuando estos activos integran un portafolio de inversión, no se alcanza una reducción del riesgo como en el periodo Precrisis; además, el riesgo también incremento, pasando de 24.65 a 31.38, por lo que la volatilidad paso de 4.97 a 5.60.

Estos resultados son coherentes con el escenario en el que se encontraban las empresas, ya que se encontraban en el periodo de la crisis financiera lo que ocasionó

mayor incertidumbre a causa de los tipos de cambio, el brote de influenza y el incremento en el desempleo.

Tabla 5. 4 Coeficientes de correlación de los rendimientos mensuales de las acciones en el periodo de Crisis.

Acción	ALFAA	ASURB	FEMSA	AC	GMEXICO	PE&OLES	ALSEA	ELEXTRA	AMXL	TLEVISA	BBVA	GFNORTE
ALFAA	1.00											
ASURB	0.62	1.00										
FEMSA	0.76	0.53	1.00									
AC	0.44	0.13	0.47	1.00								
GMEXICO	0.57	0.44	0.25	0.21	1.00							
PE&OLES	0.64	0.74	0.41	-0.01	0.38	1.00						
ALSEA	0.71	0.39	0.46	0.67	0.42	0.49	1.00					
ELEKTRA	0.32	0.23	0.52	0.25	0.14	0.41	0.30	1.00				
AMXL	0.83	0.50	0.74	0.66	0.30	0.38	0.76	0.31	1.00			
TLVISA	0.66	0.36	0.53	0.75	0.63	0.35	0.80	0.26	0.59	1.00		
BBVA	0.74	0.63	0.72	0.38	0.47	0.49	0.64	0.49	0.77	0.61	1.00	
GRNORTE	0.84	0.48	0.48	0.41	0.52	0.65	0.79	0.37	0.65	0.69	0.65	1.00

Fuente: Elaboración propia.

En este periodo el portafolio alcanzó el riesgo mayor (31.38), y éste fue similar al riesgo del portafolio en el periodo de estudio completo señalado en el capítulo IV (32.40).

Portafolio en el periodo de postcrisis

Tabla 5. 5 Resultados del portafolio en el periodo de Postcrisis.

Periodo	Riesgo	Volatilidad	Correlación Promedio
Postcrisis	25.49	5.05	0.205

Fuente: Elaboración propia.

En este periodo, que comprende del 1er trimestre de 2010 al 1er trimestre de 2011, el portafolio de inversión tuvo una disminución en la correlación promedio, paso de 0.391 a 0.205, sin embargo, esta correlación sigue siendo mayor con respecto al periodo de

Precrisis; el riesgo y la volatilidad tuvieron el mismo comportamiento. El riesgo paso de 31.38 a 25.49 y la volatilidad disminuyo de 5.60 a 5.05.

Tabla 5. 6 Coeficientes de correlación de los rendimientos mensuales de las acciones en el periodo de Postcrisis.

Acción	ALFAA	ASURB	FEMSA	AC	GMEXICO	PE&OLES	ALSEA	ELEXTRA	AMXL	TLEVISA	BBVA	GFNORTE
ALFAA	1.00											
ASURB	0.29	1.00										
FEMSA	0.24	0.25	1.00									
AC	0.00	0.04	0.17	1.00								
GMEXICO	0.25	0.48	0.48	0.25	1.00							
PE&OLES	0.36	0.36	0.61	0.29	0.76	1.00						
ALSEA	0.16	0.10	-0.03	0.15	0.49	-0.06	1.00					
ELEKTRA	0.66	0.44	-0.07	-0.08	0.27	0.46	-0.04	1.00				
AMXL	0.36	0.41	0.56	0.02	0.55	0.48	0.33	0.04	1.00			
TLVISA	0.22	0.33	0.63	0.22	0.59	0.54	0.22	0.12	0.55	1.00		
BBVA	0.20	0.25	0.20	0.46	0.19	0.05	0.32	0.04	0.30	0.12	1.00	
GRNORTE	0.46	0.33	0.52	-0.09	0.80	0.64	0.46	0.26	0.60	0.59	-0.06	1.00

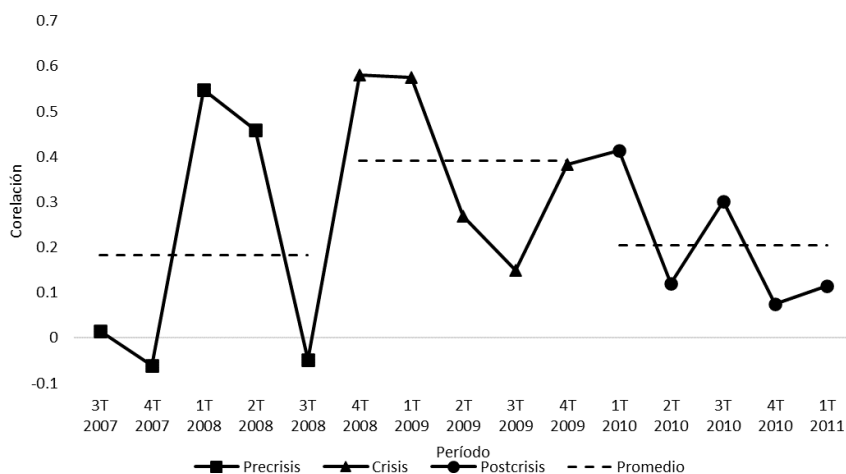
Fuente: Elaboración propia.

En la matriz de correlación de este periodo (tabla 5.6), podemos observar nuevamente correlaciones entre los activos menores a 0.50, pero mayores a las del periodo de Precrisis y se comienzan a observar mayor número de correlaciones negativas comparado con el periodo de Crisis.

La Figura 5.4 muestra la evolución de la correlación promedio trimestral para los tres periodos estudiados. En el caso del periodo Precrisis se observa una correlación promedio de 0.183.

También podemos notar que en el 3er trimestre de 2008 la correlación pasa de ser negativa (periodo Precrisis) a un valor máximo positivo mayor a 0.50 manteniendo alta durante un trimestre completo (periodo Crisis). Entre estos periodos la correlación promedio aumenta de 0.183 a 0.398.

Figura 5.4 Correlación promedio trimestral.



Fuente: Elaboración propia.

En el 3er trimestre del periodo Crisis se observa un ligero descenso de la correlación, pero hacia el 4to está se incrementa de nuevo. Posteriormente, en el 1er trimestre del periodo Postcrisis la correlación comienza a descender alcanzando un promedio de 0.205, sin embargo, no regresa el mismo nivel del periodo Precrisis.

Comparación del Modelo media-varianza y MIU

Tabla 5.7. Riesgo del portafolio según los modelos M-V y de Índice Único durante los periodos estudiados.

	Modelo Media-Varianza	Modelo de Índice Único	S&P/BMV IPC
Periodo completo	26.21	60.85	39.82
Precrisis	24.67	25.00	18.74
Crisis	31.40	83.56	84.31
Postcrisis	25.50	18.35	15.06

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5.7 se hace un resumen del riesgo estimado bajo los modelos media-varianza y de Índice Único; además la última columna muestra el riesgo del mercado.

Para el periodo de estudio completo el riesgo de mercado es de 39.82, en el caso del Modelo M-V éste subestima el riesgo y el MIU sobreestima el riesgo.

Además, podemos observar lo siguiente:

- En el periodo Precrisis ambos modelos sobreestiman el riesgo de mercado, aunque el que mejor ajusta el riesgo es el Modelo M-V.
- En el periodo Crisis ambos modelos subestiman el riesgo de mercado, aunque el MIU estima un riesgo muy similar al riesgo de mercado, de forma preliminar podemos decir que el MIU es un buen estimador del riesgo en periodo de crisis financiera.
- En el periodo Postcrisis ambos modelos sobreestiman el riesgo de mercado, pero el MIU ajusta mejor el riesgo.

La elección del modelo dependerá de la aversión al riesgo de cada inversionista; si es muy adverso al riesgo elegiría el MIU.

Tabla 5.8. Riesgo sistemático según el modelo MIU durante los periodos estudiados.

	Riesgo sistemático	S&P/BMV IPC
Periodo completo	29.89	39.82
Precrisis	14.07	18.74
Crisis	63.29	84.31
Postcrisis	11.31	15.06

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5.8 se muestra la estimación del riesgo atribuible al índice de mercado (riesgo sistemático), observamos que en todos los periodos éste está subestimado. En el periodo en el que mejor se estimó el riesgo de mercado es el Periodo Postcrisis y donde no se consiguió una buena estimación fue en el Periodo Crisis.

Tabla 5.9. Riesgo del portafolio según los modelos M-V, de Índice Único y 1/n durante los periodos estudiados.

	Modelo Media- Varianza	Modelo de Índice Único	Modelo 1/n	S&P/BMV IPC
Periodo completo	26.21*	60.85	59.65	39.82
Precrisis	24.67*	25.00	27.77	18.74
Crisis	31.40	83.56*	124.76	84.31
Postcrisis	25.50	18.35*	21.17	15.06

Las cantidades marcadas con un asterisco indican el modelo con la menor diferencia respecto al mercado.

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 5.9 se muestra la estimación del riesgo del portafolio bajo tres modelos, observando lo siguiente:

- Para el periodo completo y el periodo Precrisis el modelo que consiguió la mejor estimación del riesgo fue el Modelo M-V.
- En el periodo Crisis y Postcrisis el modelo que ajusto mejor la estimación del riesgo fue el MIU.

Con base en lo anterior, podemos decir que los modelos que toman en consideración las covarianzas (Modelo M-V y MIU) son mejores estimadores del riesgo comparado con el que hace una diversificación aleatoria (Modelo 1/n).

Conclusiones

En este trabajo investigamos la evolución del riesgo de un portafolio durante la crisis financiera de 2008, para este fin estudiamos dos modelos, el Modelo M-V propuesto por Markowitz y el MIU. El primero considera la covarianza entre las acciones y el segundo toma en cuenta la covarianza entre las acciones y el índice de mercado.

Mediante la construcción de un portafolio de inversión para el periodo julio 2007 a marzo de 2011, y su análisis durante tres periodos Precrisis, Crisis y Postcrisis, obtuvimos los siguientes resultados: en los periodos Precrisis y Postcrisis ambos modelos sobreestiman el riesgo de mercado, mientras que en el periodo Crisis ambos subestiman el riesgo de mercado.

Además, el MIU nos permitió estudiar al riesgo en dos componentes, mutuamente excluyentes, el riesgo sistemático y el riesgo no sistemático. Observamos lo siguiente: en todos los periodos mencionados el riesgo sistemático (o de mercado) se subestimó; la mejor estimación de este riesgo se obtuvo en el periodo Postcrisis y la peor en el periodo Crisis.

Sin embargo, el Modelo M-V ajusta mejor el riesgo para el periodo Precrisis, y el MIU resulta ser mejor estimador del riesgo para los periodos Crisis y Postcrisis. La elección del modelo dependerá de la aversión al riesgo de cada inversionista; si es muy adverso al riesgo elegiría el MIU.

También analizamos el riesgo que se estimaría sin tomar en cuenta la covarianza entre las acciones a través de una diversificación aleatoria, es decir, asignando pesos $1/n$ y podemos concluir que los modelos M-V y MIU son mejores estimadores del riesgo en cualquiera de nuestros periodos de estudio.

Con toda la teoría desarrollada a través del presente trabajo podemos concluir que si bien el modelo M-V propuesto por Markowitz nos da una idea de cómo aumenta el riesgo

en tiempo de crisis, este modelo por sí sólo no puede explicar lo que entendemos por riesgo en un contexto más general.

Debido a que la varianza de un portafolio utilizada como medida del riesgo bajo el Modelo M-V sólo nos da una idea general del riesgo de mercado, sugerimos utilizar otras medidas que consideren distintos tipos de riesgo como el riesgo de crédito o el riesgo operacional como son la medida VaR, CVaR.

Apéndice A1

A1.1 Frontera eficiente con un activo libre de riesgo

Al introducir al portafolio de inversión un activo libre de riesgo, se introducen las posibilidades de endeudamiento y otorgamiento de préstamo a una tasa de interés sin riesgo. Por ejemplo, obtener un préstamo a corto plazo a una tasa de interés baja o depositar dinero en un banco a cierta tasa de interés.

Definición. Un **activo libre de riesgo**, es aquel que promete una rentabilidad certera, cuya varianza o desviación estándar es cero.

El inversionista podrá combinar acciones con activos libres de riesgo, con lo cual, el riesgo del portafolio será menor.

Para estudiar la forma de la frontera eficiente con un activo libre de riesgo, suponga un portafolio de inversión conformado por dos activos. Sea w_1 el peso de la acción y $(1 - w_1)$ el peso del activo libre de riesgo. Entonces, el rendimiento esperado de este portafolio se define como:

$$E(R_p) = (1 - w_1)r_f + w_1E(R_1) \quad (A1.1)$$

Donde r_f denota la tasa de rendimiento libre de riesgo y $E(R_1)$ denota el rendimiento esperado de la acción.

Con base en la ecuación 1.7, la varianza del rendimiento de este portafolio se define por la siguiente ecuación,

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_f^2 + 2w_1(1 - w_1)\sigma_{1f} \quad (A1.2)$$

Donde σ_f^2 es la varianza de la tasa de rendimiento del activo libre de riesgo, y σ_{1f} es la covarianza entre los rendimientos de la acción y el activo libre de riesgo. Por definición, $\sigma_f^2 = 0$. Y ya que no hay una asociación entre rendimientos constantes (libres de riesgo) y rendimientos variables (con riesgo), la covarianza también es igual con cero, $\sigma_{1f} = 0$. Por lo que la ecuación (A1.2) se puede reescribir de la siguiente forma,

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 \quad (A1.3)$$

$$\sigma_p = w_1 \sigma_1 \quad (A1.3a)$$

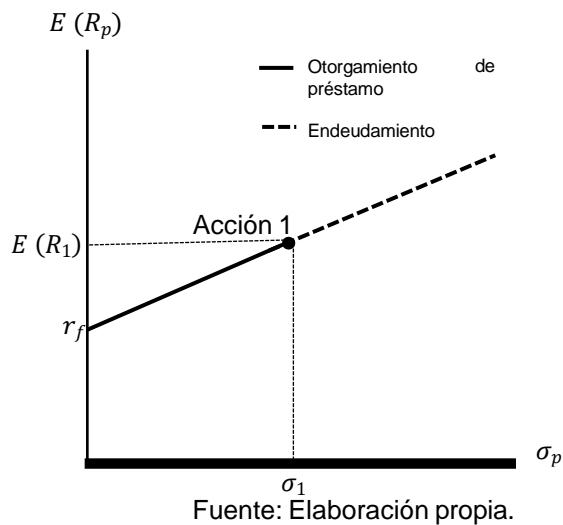
Tomando la raíz cuadrada positiva de la ecuación (A1.3) y despejando para w_1 , produce

$$w_1 = \frac{\sigma_p}{\sigma_1} \quad (A1.4)$$

Sustituyendo la expresión (A1.4) en la ecuación (A1.1) y simplificando, resulta en,

$$E(R_p) = r_f + \frac{E(R_1) - r_f}{\sigma_1} \sigma_p \quad (A1.5)$$

Figura A1.1 Línea de oportunidad combinando una acción y un activo libre de riesgo

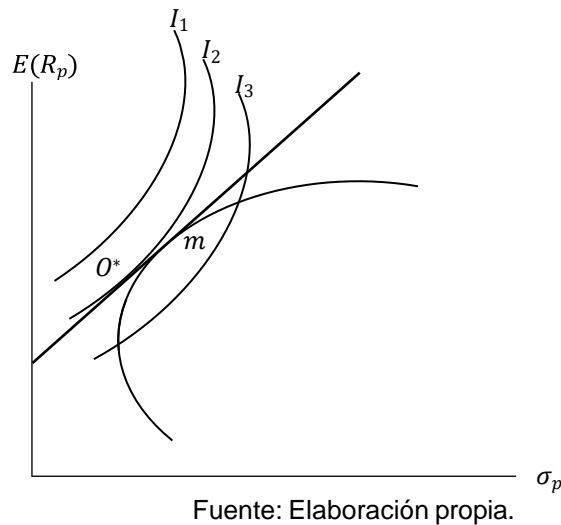


La ecuación (A1.5) muestra que $E(R_p)$ está linealmente relacionado con σ_p , lo que significa que cualquier portafolio formado a partir de un activo libre de riesgo y un portafolio riesgoso se ubicará en una línea recta que conecta esos dos puntos. La ubicación de los portafolios dependerá de los pesos de los activos.

La acción 1 puede ser vista como un portafolio, entonces, el análisis puede extenderse a un caso general de combinar cualquier portafolio riesgoso, dentro del conjunto de oportunidad, con un activo libre de riesgo. Esta combinación resultará de nuevo en un nuevo portafolio en algún lugar de la línea recta que conecta a los dos portafolios.

Dadas la frontera eficiente lineal y curvas de indiferencia convexas para un inversionista averso al riesgo, el teorema de la frontera eficiente aún se cumple y el inversionista elegirá de manera óptima un portafolio que se encuentre en la frontera eficiente lineal y que además sea un punto de tangencia con la isocuanta de mayor valor.

Figura A1.2 Identificando el portafolio óptimo sobre la línea recta de la frontera eficiente



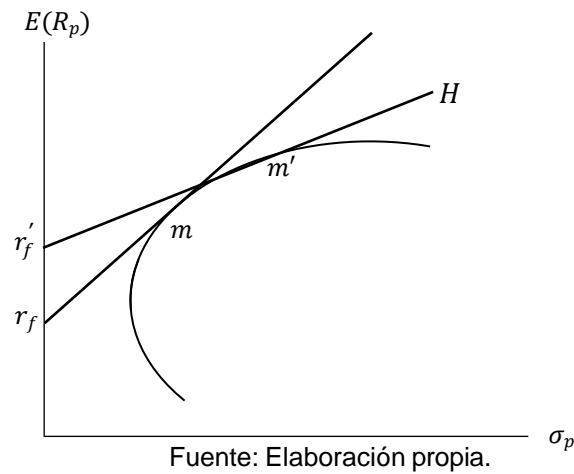
La figura A1.2 muestra el portafolio elegido por un inversionista averso al riesgo. El inversionista elige el portafolio O^* ya que le proporciona mayor utilidad, I_2 . El portafolio O^* implica inversiones positivas en el activo libre de riesgo y el portafolio de tangencia m .

Definición: El **portafolio de tangencia m** es el portafolio de acciones en el punto de intersección de las dos fronteras eficientes, la de activos riesgosos y la que incluye un activo libre de riesgo.

Los portafolios de tangencia cambian su posición según el nivel en que la tasa libre de riesgo cambia. En la figura A1.3 podemos observar que conforme la tasa de rendimiento libre de riesgo crece de r_f a r'_f el portafolio de tangencia se mueve de m a m' .

Si los inversionistas pueden prestar a r_f pero no endeudarse a la misma tasa, entonces, la frontera eficiente será la línea discontinua $\overline{r_f m}$ (primero lineal y luego curva). Pero, si el inversionista presta a la tasa r_f y se endeuda a la tasa r'_f , entonces, la frontera eficiente se convierte en $\overline{r'_f m}$ (lineal, curva, y lineal con menor pendiente).

Figura A1.3 Portafolios de tangencia con dos tasas diferentes de interés libre de riesgo



A1.2 Determinación de la frontera eficiente con un activo libre de riesgo

Recordemos que invertir en un activo libre de riesgo consiste en pedir prestado o prestar dinero a una tasa libre de riesgo. Entonces, cuando el conjunto de oportunidad está compuesto por portafolios eficientes de $n + 1$ activos, n acciones riesgosas y un activo libre de riesgo, el modelo media-varianza se plantea como sigue,

$$\text{Minimizar } L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (\text{A1.6})$$

Sujeto a

$$\text{sujeto a } \mathbf{w}^T \mathbf{E} + w_f r_f = E(R_p) \quad (\text{A1.7})$$

Donde L es la función objetivo y $w_f = 1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1}$ es el peso del activo libre de riesgo. La varianza del portafolio conformado por $n + 1$ activos es igual a la varianza de un portafolio formado únicamente por acciones, ya que, como se explicó, la varianza de la tasa de rendimiento libre de riesgo es cero, y la covarianza entre el activo libre de riesgo y los acciones también es cero.

Por lo tanto, aunque se agregue un activo libre de riesgo al conjunto de acciones la varianza del portafolio se calcula igual que para un portafolio conformado únicamente por acciones.

Solución al modelo media-varianza con un activo libre de riesgo

Como la restricción del modelo (ecuación (A1.7)) es una igualdad, podemos utilizar los multiplicadores de Lagrange para darle solución al problema. La función objetivo se reformula como sigue,

$$\text{Minimizar } L = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} + \lambda [E(R_p) - \mathbf{w}^T \mathbf{E} + (1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1})r_f] \quad (\text{A1.8})$$

Ahora, obtenemos las condiciones de primer orden para dar solución al problema.

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad (\text{A1.9})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E(R_p) - \mathbf{w}^T \mathbf{E} - (1 - \mathbf{w}^T \mathbf{1})r_f = 0 \quad (\text{A1.10})$$

Como mencionamos anteriormente, ya que $\boldsymbol{\Sigma}$ es una matriz de covarianzas definida positiva, las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para un óptimo global. De las ecuaciones (A1.9) y (A1.10), tenemos

$$\mathbf{w} = \lambda \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) \quad (\text{A1.11})$$

$$E(R_p) = r_f + \mathbf{w}^T (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) \quad (\text{A1.12})$$

Sustituyendo la ecuación (A1.11) en la ecuación (A1.12) obtenemos

$$E(R_p) = r_f + \lambda (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) \quad (\text{A1.13})$$

Entonces, el multiplicador de Lagrange es

$$\lambda = \frac{[E(R_p) - r_f]}{H} \quad (\text{A1.14})$$

Donde

$$\begin{aligned} H &= (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) \\ &= B - 2r_f A + r_f^2 C \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

Debido a que Σ^{-1} es definida positiva, $H > 0$. Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (A1.14) en la ecuación (A1.11), obtenemos el vector óptimo de pesos para las n acciones del portafolio eficiente.

$$\mathbf{w}_p = \Sigma^{-1}(\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) \left[\frac{E(R_p) - r_f}{H} \right] \quad (A1.16)$$

Finalmente, el peso del activo libre de riesgo en el portafolio eficiente es

$$w_f = 1 - \mathbf{w}_p^T \mathbf{1} \quad (A1.17)$$

Gráfica de la frontera eficiente con un activo libre de riesgo

La ecuación de la frontera eficiente puede construirse formando una ecuación entre el rendimiento esperado, $E(R_p)$, y la varianza, σ_p^2 , del portafolio p .

Sea \mathbf{w}_p el vector de peso óptimo para el portafolio p sobre la frontera eficiente. Entonces, la varianza del portafolio queda expresada como

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \mathbf{w}_p^T \Sigma \mathbf{w}_p = (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) \left[\frac{E(R_p) - r_f}{H} \right]^2 \\ \sigma_p^2 &= \left[\frac{E(R_p) - r_f}{H} \right]^2 \end{aligned} \quad (A1.18)$$

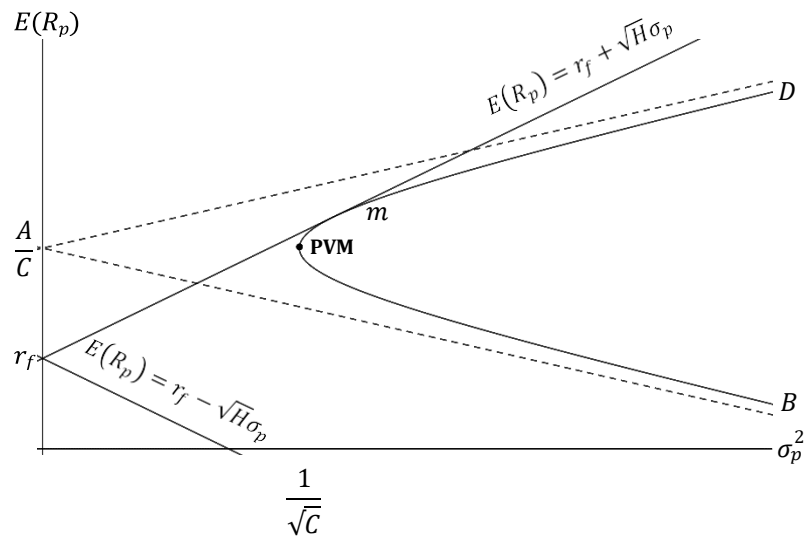
Entonces,

$$\sigma_p = \begin{cases} [E(R_p) - r_f / \sqrt{H}], & E(R_p) \geq r_f \\ -[E(R_p) - r_f / \sqrt{H}], & E(R_p) < r_f \end{cases} \quad (A1.19)$$

Es decir, la frontera eficiente de todos los activos está compuesta por dos líneas que parten del intercepto r_f en el plano $[\sigma_p, E(R_p)]$ con pendientes \sqrt{H} y $-\sqrt{H}$, respectivamente.

La relación entre $E(R_p)$ y σ_p en la ecuación (A1.18) está representada en la figura A1.4. La línea continua superior indica la frontera eficiente. El portafolio en el punto de tangencia m es el denominado **portafolio de tangencia**, portafolio óptimo de riesgo o portafolio de mercado.

Figura A1.4 Frontera eficiente con un activo libre de riesgo



Fuente: Elaboración propia.

Como señalamos en la sección II.2, la ubicación del portafolio de tangencia cambia según el nivel de la tasa de rendimiento libre de riesgo. En esta sección, describimos un método para identificar los pesos para el portafolio de tangencia.

Los pesos del portafolio de tangencia los obtenemos usando la ecuación (A1.11), dividiendo todos los términos de la ecuación entre la constante λ .

$$\Sigma \left(\frac{\mathbf{w}}{\lambda} \right) - (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad (\text{A1.20})$$

Sea $\mathbf{z} = \mathbf{w}/\lambda$, entonces, podemos reescribir la ecuación (A1.20) como

$$\Sigma \mathbf{z} - (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) = \mathbf{0} \quad (\text{A1.21})$$

La solución de la ecuación (A1.21) se obtiene de

$$\mathbf{z} = \Sigma^{-1} (\mathbf{E} - r_f \mathbf{1}) \quad (\text{A1.22})$$

Por lo tanto, los pesos w del portafolio de tangencia pueden ser obtenidos normalizando los pesos transformados z . En general,

$$w_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^n z_j} \quad (A1.23)$$

Ejemplo. Frontera eficiente con un activo libre de riesgo

Al igual que en el ejemplo anterior, un inversionista busca un portafolio eficiente con un rendimiento esperado de 1.8%. El inversionista quiere conformar el portafolio usando las tres acciones de la tabla 2.1 más un activo libre de riesgo con $r_f = 7.185\%$ (consideramos la tasa Cetes a 28 días en el periodo julio 2007 a marzo 2011).

A continuación, calculamos los pesos óptimos de las acciones y del activo libre de riesgo para el portafolio eficiente

Los pesos óptimos de las acciones se encuentran utilizando la ecuación (A1.16). Para utilizar esta ecuación, primero debemos calcular H .

$$H = B - 2r_f A + r_f^2 C = 0.0612 - 2(7.185)(0.0172) + (7.185)^2(0.0275) = 1.23$$

Los pesos óptimos para el portafolio eficiente son,

$$\mathbf{w}_p = \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 & -1 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 & (0.16 - 7.185) \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 & 1.54 - 7.185 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2.68 - 7.185 \\ 1.8 - 7.185 \\ 0.6634 \end{pmatrix} \left(\frac{1.23}{1.23} \right) = \begin{pmatrix} -0.0225 \\ 0.6634 \\ 0.1463 \end{pmatrix}$$

Y el peso para el activo libre de riesgo es $w_f = 1 - \sum_{i=1}^3 w_i = 1 - 0.79 = 0.2128$.

Como podemos observar, para la construcción del portafolio eficiente, el inversionista compra dos posiciones largas igual a los pesos del portafolio, 66.34% en la acción 2 y 14.63% en la acción 3, y también realiza una venta en corto por el 2.25% de la acción 1. Además, el inversionista debería comprar una posición larga más por el 21.28% en el activo libre de riesgo (es decir, prestar el 21.28% de la inversión neta a la tasa libre de riesgo).

La varianza del portafolio es

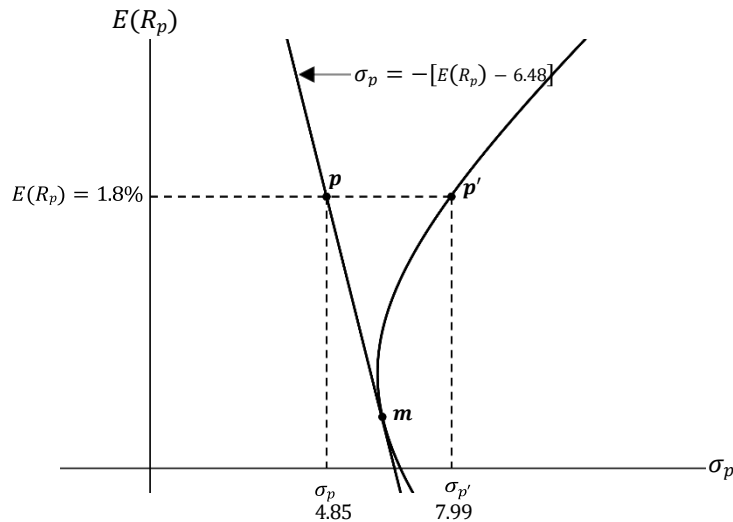
$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}_p^T \Sigma \mathbf{w}_p = \begin{pmatrix} -0.0225 & 0.6634 & 0.1463 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0225 \\ 0.6634 \\ 0.1463 \end{pmatrix} = 23.52$$

o

$$\sigma_p = 4.85$$

La siguiente figura ilustra el portafolio eficiente p con desviación estándar de 4.85, el cual se localiza en la frontera eficiente lineal. Este portafolio, con el activo libre de riesgo, es comparado con el portafolio p' , que es el portafolio eficiente obtenido usando solo acciones del ejemplo anterior. Al introducir el activo libre de riesgo, el inversionista gana el mismo rendimiento esperado de 1.8%, pero reduce el riesgo, medido por la desviación estándar de $\sigma_p = 7.99$ a $\sigma_{p'} = 4.85$.

Figura A1.5 Un portafolio eficiente con un activo libre de riesgo.



Fuente: Elaboración propia con datos de las acciones presentadas en la tabla 2.1.

Ejemplo. Portafolios de tangencia

Considere los mismos acciones de la tabla 2.1 y la tasa de rendimiento libre de riesgo igual a la del ejemplo de portafolios eficientes con un activo libre de riesgo, $r_f = 7.185\%$.

Los rendimientos esperados y la matriz de covarianzas de las acciones son:

$$\begin{array}{l}
 E(r_1) \quad 2.68 \\
 E = [E(r_2)] = (0.16) \text{ y } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 \end{pmatrix} \\
 E(r_3) \quad 1.54
 \end{array}$$

Entonces, las ecuaciones simultáneas para los pesos del portafolio de tangencia m son

$$190.74z_1 + 26.27z_2 + 44.73z_3 = 2.68 - 7.185$$

$$26.27z_1 + 41.77z_2 + 24.37z_3 = 0.16 - 7.185$$

$$44.73z_1 + 24.37z_2 + 64.90z_3 = 1.54 - 7.185$$

La solución de las ecuaciones anteriores es

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190.74 & 26.27 & 44.73 \\ 26.27 & 41.77 & 24.37 \\ 44.73 & 24.37 & 64.90 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2.68 - 7.185 \\ 0.16 - 7.185 \\ 1.54 - 7.185 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0052 \\ -0.1519 \\ -0.0335 \end{pmatrix}$$

Así, los pesos de las tres acciones para el portafolio de tangencia m son

$$w_1 = \frac{z_1}{\sum_{i=1}^3 z_i} = \frac{0.0052}{0.0052 - 0.1519 - 0.0335} = -0.0286$$

$$w_2 = \frac{z_2}{\sum_{i=1}^3 z_i} = \frac{-0.1519}{0.0052 - 0.1519 - 0.0335} = 0.8427$$

$$w_3 = \frac{z_3}{\sum_{i=1}^3 z_i} = \frac{-0.0335}{0.0052 - 0.1519 - 0.0335} = 0.1859$$

Basados en los pesos que recién obtuvimos, calculamos el rendimiento esperado y la varianza del portafolio de tangencia. Los cuales son $E(R_m) = 0.34\%$ y $\sigma_m^2 = 37.95$

Anexo B.1 Aproximación del PVM

La aproximación del PVM se puede llevar a cabo mediante un método de prueba y error, en el que se fija el valor de la variable w_1 y el valor de las variables w_2 y w_3 se va iterando. Una vez determinados estos tres valores, sustituimos en la ecuación de la varianza del portafolio; damos distintos valores a las variables de peso hasta encontrar el portafolio de varianza mínima.

Tabla B1.1 Aproximación del PVM mediante un método de prueba y error

w_1	w_2	w_3	σ_p^2
0	1	0	41.768
0	0.9	0.1	38.868
0	0.8	0.2	37.126
0	0.7	0.3	36.542
0	0.6	0.4	37.117
0	0.5	0.5	38.851
0	0.4	0.6	41.743
0	0.3	0.7	45.793
0	0.2	0.8	51.002
0	0.1	0.9	57.369
0	0	1	64.896
...
0.1	1	-0.1	43.811
0.1	0.9	0	40.469
0.1	0.8	0.1	38.286
0.1	0.7	0.2	37.261
0.1	0.6	0.3	37.394
0.1	0.5	0.4	38.686
0.1	0.4	0.5	41.137
0.1	0.3	0.6	44.746
0.1	0.2	0.7	49.513
0.1	0.1	0.8	55.439
0.1	0	0.9	62.523

...
0.02	1	-0.02	41.910
0.02	0.9	0.08	38.922
0.02	0.8	0.18	37.092
0.02	0.7	0.28	36.420
0.02	0.6	0.38	36.907
0.02	0.5	0.48	38.552
0.02	0.4	0.58	41.356
0.02	0.3	0.68	45.318
0.02	0.2	0.78	50.439
0.02	0.1	0.88	56.718
0.02	0	0.98	64.155
...
0.03	1	-0.03	42.032
0.03	0.9	0.07	38.999
0.03	0.8	0.17	37.125
0.03	0.7	0.27	36.409
0.03	0.6	0.37	36.852
0.03	0.5	0.47	38.453
0.03	0.4	0.57	41.21
0.03	0.3	0.67	45.130
0.03	0.2	0.77	50.207
0.03	0.1	0.87	56.442
0.03	0	0.97	63.835
0.03	0.6891	0.2809	36.4009215
0.03	0.689	0.281	36.4009117
0.03	0.6889	0.2811	36.400903
0.03	0.6888	0.2812	36.4008955
0.03	0.6887	0.2813	36.4008892
0.03	0.6886	0.2814	36.400884
0.03	0.6885	0.2815	36.4008799
0.03	0.6884	0.2816	36.4008771

0.03	0.6883	0.2817	36.4008754
0.03	0.6882	0.2818	36.4008748
0.03	0.6881	0.2819	36.4008754
0.03	0.688	0.282	36.4008772
0.03	0.6879	0.2821	36.4008801
0.03	0.6878	0.2822	36.4008842
0.03	0.6877	0.2823	36.4008894
0.03	0.6876	0.2824	36.4008958
...
1	1	-1	211.764
1	0.9	-0.9	204.449
1	0.8	-0.8	198.292
1	0.7	-0.7	193.294
1	0.6	-0.6	189.454
1	0.5	-0.5	186.773
1	0.4	-0.4	185.249
1	0.3	-0.3	184.885
1	0.2	-0.2	185.679
1	0.1	-0.1	187.632
1	0	0	190.743

Fuente: Elaboración propia con datos de las acciones presentadas en la tabla 2.1.

La fila marcada de gris representa a los pesos y a la varianza del PVM. Debido a que este es un método de prueba y error no se determinan los pesos exactos. Sin embargo, se puede comprobar con la solución dada en Capítulo II a través de matrices que esta es una buena aproximación a los valores reales.

Anexo B.2 Descripción de las empresas que conforman el portafolio

Sector Industrial

Alfa, S.A.B. de C.V.

Empresa mexicana con presencia global, creada en 1974. Alfa es una empresa que administra un portafolio de negocios diversificado: Alpek, uno de los más grandes productores a nivel mundial de poliéster. Sigma, compañía multinacional líder en la industria de alimentos, que produce, comercializa y distribuye productos de calidad de marca propia. Nematik, proveedor líder de soluciones innovadoras de aligeramiento para la industria automotriz global. Axtel, compañía de Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) que sirve a los mercados mayorista, empresarial y gubernamental en México. Y Newpek, empresa que realiza operaciones en la industria de hidrocarburos en EE.UU. y México.²³

Grupo Aeroportuario del Sureste, S.A.B. de C.V.

Compañía mexicana constituida en abril de 1998, como una entidad de la administración pública federal para administrar, operar, explotar y, construir nueve aeropuertos en la región Sureste de México. Los nueve aeropuertos se ubican en las siguientes ciudades: Cancún, Cozumel, Mérida, Huatulco, Oaxaca, Veracruz, Villahermosa, Tapachula y Minatitlán. Grupo Aeroportuario del Sureste fue el primer grupo aeroportuario en el mundo que cotizó simultáneamente en la bolsa de valores de Nueva York (NYSE) y en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV); es una de las cuatro compañías de mercados emergentes en el sector de transporte e infraestructura incluida en el Dow Jones Sustainability Index (DJSI EM).²⁴

²³ Obtenido de <https://alfa.com.mx/>

²⁴ Obtenido de <https://www.aeropuertosgap.com.mx/es/>

Sector Productos de consumo básico

Fomento Económico Mexicano, S.A.B. de C.V.

Empresa de consumo de clase mundial, fundada en 1980, líder en Latinoamérica, cuyos principios son generar valor económico y social, generando satisfacción en la demanda de los consumidores a través de la producción, distribución y comercialización. Participa en comercio al detalle a través de FEMSA Comercio, que comprende la División Proximidad y de la que forma parte OXXO; una División Salud que incluye farmacias; y una División Combustibles que opera las estaciones de servicio OXXO GAS. En la industria de bebidas participa operando Coca-Cola FEMSA; y en el sector cervecero es accionista de HEINEKEN. A través de FEMSA Negocios Estratégicos, ofrece servicios de logística soluciones de refrigeración en el punto de venta y soluciones en plásticos a las empresas FEMSA y clientes externos.²⁵

Arca Continental, S.A.B. de C.V.

Arca Continental tiene una trayectoria destacada de más de 94 años, es una empresa dedicada a la producción, distribución y venta de bebidas de las marcas propiedad de The Coca-Cola Company, así como botanas saladas bajo las marcas Bokados en México, Inalecsa en Ecuador y Wise y Deep River en los Estados Unidos. Es la segunda embotelladora de Coca-Cola más grande de América Latina y una de las más importantes del mundo.²⁶

Sector Materiales

Grupo México, S.A.B. de C.V.

Empresa fundada en 1942, aunque se le reconoce principalmente por la minería (con presencia en seis países), se dedica de forma importante al transporte ferroviario (de mercancías y personas) y a la planeación logística de transporte; así como a la creación

²⁵ Obtenido de <https://www.femsa.com/es/>

²⁶ Obtenido de <https://www.arcacontal.com/>

de macro infraestructura energética (plantas de procesamiento de energía, perforación, actividad eólica y construcción en general). Algunas de sus filiales son Americas Mining Corporation, Souther Copper Corporation, Asarco, Los Frailes, Ferrosur, Ferromex, Controladora de Infraestructura Petrolera, México Compañía Constructora y Controladora de Infraestructura Energética México.²⁷

Industrias Peñoles, S.A.B. de C.V.

Es uno de los grupos industriales mexicanos de recursos naturales más importantes desde su fundación en 1887. Inicialmente dedicada a la exploración, minado, fundición, afinación y comercialización de minerales metálicos no ferrosos y posteriormente al sector químico. Actualmente es el mayor productor mundial de plata afinada y el más importante de bismuto metálico en América; líder latinoamericano en la producción de oro y plomo afinados, y se encuentra entre los principales productores mundiales de zinc afinado y sulfato de sodio. Peñoles es uno de los mayores exportadores netos del sector privado de México.²⁸

Sector Productos de consumo no básico

Alsea, S.A.B. de C.V.

Alsea es el operador de restaurantes líder en América Latina y España, con marcas de reconocimiento global dentro de los segmentos de comida rápida, cafeterías, comida casual, fast casual y restaurante familiar. Cuenta con un portafolio muti-marcas, algunas de ellas son Domino's Pizza, Starbucks, Burger King, Chili's, Italianni's, entre otras. La compañía opera cerca de 4,200 unidades y cuenta con operaciones en México, España, Argentina, Colombia, Chile, Francia, Portugal, Holanda, Bélgica, Luxemburgo y Uruguay.²⁹

²⁷ Obtenido de <https://www.gmexico.com/Pages/default.aspx>

²⁸ Obtenido de <https://www.penoles.com.mx/>

²⁹ Obtenido de <https://www.alsea.net/>

Grupo Elektra S.A.B. de C.V.

La compañía se fundó en 1950 como una empresa dedicada a la fabricación de transmisores de radio y en 1957 comenzó a operar como una comercializadora con la apertura de su primera tienda Elektra. Es la compañía de servicios financieros y de comercio especializado líder en Latinoamérica y es el mayor proveedor de préstamos no bancarios de corto plazo en Estados Unidos. Actualmente opera cerca de 7,000 puntos de contacto a través de sus tiendas Elektra, Salinas y Rocha, Banco Azteca y sucursales Purpose Financial, de los cuales, más de 5,000 se encuentran en seis países latinoamericanos: México, Guatemala, Honduras, Perú y Panamá, y más de 1,500 sucursales en Estados Unidos.³⁰

Sector Telecomunicaciones

América Móvil S.A.B. de C.V.

Es la empresa líder en servicios integrados de telecomunicaciones en 26 países de América y Europa. En América Latina, América Móvil opera en los sectores de telefonía fija, móvil y servicios de internet de banda ancha, además de ofrecer servicios de televisión en demanda. Le pertenecen las empresas Telmex, Telcel y Claro Video, que tienen cobertura a lo largo del país y en numerosos países en América.³¹

Grupo Televisa S.A.B.

Televisa es una empresa de medios líder en la producción de contenido audiovisual en español, un importante operador de cable en México y un sistema líder de televisión de paga vía satélite en México. Es un conglomerado de empresas de medios de comunicación productoras de material visual, teatral y de internet. Opera en cinco unidades de negocio: (1) Televisión abierta, el Canal de las Estrellas, Canal 5, Galavisión y FOROTv; (2) Televisión de paga, SKY, Cablevisión y Televisa Networks; (3) Editorial Televisa, publica y comercializa alrededor de 156 títulos de revistas bajo 92 marcas; (4) Televisa Interactive Media, administra contenidos del conglomerado a través de internet

³⁰ Obtenido de <https://www.grupoelektra.com.mx/>

³¹ Obtenido de <https://www.americamovil.com/>

y dispositivos móviles; y (5) Radio, resultado de la fusión de Grupo Radiópolis y Televisa Radio.³²

Sector Servicios Financieros

Banco Bilbao Vizcaya Argentaria, S.A.

Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (BBVA) se listó en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) en agosto de 2005. Atrae depósitos y ofrece servicios de banda minorista, mayorista y de inversión. El banco ofrece préstamos hipotecarios y de consumo, banca privada, administración de activos, seguros, fondos mutuos y servicios de corretaje de valores. BBVA opera en Europa, América Latina, Estados Unidos, China y Turquía.³³

Grupo Financiero Banorte S.A.B. de C.V.

Banorte fue fundado en 1899 en la ciudad de Monterrey, donde comenzó sus operaciones como un banco regional. Grupo Financiero Banorte ofrece una amplia variedad de productos y servicios a través de su banco, casa de bolsa, compañías de pensiones y seguros, Afore, fondos de inversión, así como las empresas de arrendamiento, factoraje y almacenaje. Es el proveedor número uno de créditos a gobiernos y el segundo banco más importante en créditos hipotecarios y ha consolidado su posición como uno de los bancos más rentables en México; es el único banco comercial manejado por un equipo directivo mexicano.³⁴

³² Obtenido de <https://www.televisa.com/corporativo/>

³³ Obtenido de <https://www.bbva.com/es/informacion-corporativa/>

³⁴ Obtenido de <https://www.banorte.com/>

Bibliografía

- Abel, A. B., & Bernanke, B. S. (2004). *Macroeconomía, cuarta edición*. Madrid: Pearson Educación, S.A.
- Bertsekas, D., & Tsitsiklis, J. (2008). *Introduction to Probability, 2nd Edition*. Massachusetts: Athena Scientific.
- Burns, A., & Mitchell, W. (1946). *Measuring Business Cycles*. New York: National Bureau of Economic Research.
- Cámara Izquierdo, S., & Mariña Florez, A. (2010). Naturaleza y perspectivas de la actual crisis: una caracterización marxista de largo plazo. *Política y cultura (34)*, 7-31.
- Danthine, J., & Donaldson, J. (2015). *Intermediate Financial Theory, 3ed*. Burlington: Elsevier Science, Academic.
- DOF. (1996). *CIRCULAR 10-209, Disposiciones de carácter general relativas a las operaciones de ventas en corto 25/07/1996*. México, D.F: Diario Oficial de la Federación.
- Dubova, I. (2005). La validación y aplicabilidad de la teoría del portafolio en el caso colombiano. *Cuadernos de Administración, 18(30)*, 441-279.
- Elton, E., Gruber, M., Brown, S., & Goetzmann, W. (2014). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. 9th Edition*. Danvers: John Wiley and Sons, Inc.
- Fabozzi, F. J., Gupta, F., & Markowitz, H. (2002). The Legacy of Modern Portfolio Theory. *The Journal of Investing, 11(3)*, 7-22.
- Feller, W. (1973). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. Vol. 1*. México, D.F.: Limusa-Wiley, S.A.
- Francis, J., & Kim, D. (2013). *Modern Portfolio Theory: Foundations, Analysis, and New Developments + website*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Fries, C. (2007). *Mathematical finance: theory, modeling, implementation*. Amsterdam: John Wiley & Sons, Inc.

- Garavito Masalías, C. (2014). *Microeconomía: consumidores, productores y estructuras de mercado*. Lima, Perú: Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Geczy, C. (2014). The New Diversification: Open Your Eyes to Alternatives. *The Journal of Portfolio Management*, 40(5), 146-155.
- Gitman, L., & Joehnk, M. (2009). *Fundamentos de Inversiones. Décima edición*. México: Pearson Educación.
- Hoel, P., Port, S., & Stone, C. (1971). *Introduction to probability theory*. Boston: Houghton Mifflin.
- Investing.com. (2020). *Investing.com México - Finanzas, Bolsa y Forex*. Obtenido de <https://mx.investing.com/>
- Jaramillo Olivares, A., & Jaramillo Jaramillo, M. (2016). Crisis financiera del 2008: efecto en las empresas listadas en la Bolsa Mexicana de Valores. *Revista mexicana de economía y finanzas*, 11(3), 161-177.
- Luz Juárez, G., Sánchez Daza, A., & Zurita González, J. (2015). La crisis financiera internacional de 2008 y algunos de sus efectos económicos sobre México. *Contaduría y administración*, 60(Supl. 2), 128-146.
- Mariña Flores, A. (2011). La crisis mexicana de 2008-2010 en perspectiva histórica y en el contexto de la crisis mundial. En M. García Castro, *Estudios sobre México en la crisis mundial: escenario nacional tras doce décadas de apertura y desregulación* (págs. 27-61). México, D.F.: Universidad Autónoma Metropolitana.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Markowitz, H. (1999). The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960. *Financial Analysts Journal*, 55(4), 5-16.
- Mishkin, F. (1992). Anatomy of a financial crisis. *Journal of Evolutionary Economics*, 2, 115-130.
- Pascale, R. (2009). *Decisiones financieras. Sexta edición*. Buenos Aires: Prentice Hall; Pearson Education.

- Reyes Loyola, A., & Rodríguez Calvo, R. (2010). Diversificación eficiente versus diversificación aleatoria, considerando carteras de acciones de la Bolsa Mexicana de Valores. *XII Asamblea general de ALAFEC. Modelos de Gestión del Conocimiento*. Lima, Perú: Instituto Politécnico Nacional .
- Rincón, L. (2006). *Curso intermedio de Probabilidad*. México, D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Rincón, L. (2014). *Introducción a la Probabilidad. Volumen 1*. México, D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Rodríguez García, M., Cortez Alejandro, K., A., M. S., & Garza Sánchez, H. (2015). Análisis de portafolio por sectores mediante el uso de algoritmos genéticos: caso aplicado a la Bolsa Mexicana de Valores. *Contaduría y Administración*, 60(1), 87-112.
- Ross, S. (2009). *A First Course in Probability, 8th Edition*. New Jersey: Prentice Hall.
- Ruiz Ramírez, H. (2019). Sobre el significado de crisis económica, recesión, depresión y contracción. *Contribuciones a la Economía*.
- Samuelson, P., & Nordhaus, W. (2010). *Economics 19ed*. New York: McGraw-Hill/Irwin.
- Sánchez Daza, A. (2001). Información asimétrica y mercados financieros emergentes: el análisis de Mishkin. *Análisis Económico*, vol. XVII, núm. 34, 35-66.
- Sharpe, W. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, 9(2), 277-293.
- Valles Romero, J. (2019). La recesión económica que viene. *Análisis del escenario económico en México* . México: Universidad Autónoma del Estado de México.
- Venegas Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. Segunda edición*. México, D.F.: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.